Une formule intégrale reliée à la conjecture locale de Gross-Prasad, 2ème partie: extension aux représentations tempérées

Jean-Loup Waldspurger

Une formule intégrale reliée à la conjecture locale de Gross-Prasad, $2^{ème}$ partie : extension aux représentations tempérées

J.-L. Waldspurger

1er avril 2009

Introduction

Cet article fait suite à [W1]. Rappelons les définitions des principaux objets. Soit F un corps local non archimédien de caractéristique nulle. Soit (V, q_V) un espace quadratique, c'est-à-dire que V est un espace vectoriel de dimension finie sur F et q_V est une forme quadratique non dégénérée sur V. Soit (W, q_W) un autre espace quadratique. On suppose que l'on a une décomposition orthogonale $V = W \oplus D_0 \oplus Z$, où D_0 est une droite et Z est muni d'une base $\{v_i; i = \pm 1, ..., \pm r\}$ telle que $q_V(v_i, v_j) = \delta_{i,-j}$ pour tous i, j. On note G et H les groupes spéciaux orthogonaux de V et W. Le groupe H se plonge naturellement dans G. Introduisons le sous-groupe parabolique de G formé des éléments qui conservent le drapeau

$$Fv_r \subset Fv_r \oplus Fv_{r-1} \subset .... \subset Fv_r \oplus ... \oplus Fv_1.$$

Notons U son radical unipotent. Fixons un élément non nul $v_0 \in D_0$ et un caractère continu non trivial ψ de F. On définit un caractère ξ de $U(F)$ par l'égalité

$$\xi(u) = \psi\Big(\sum_{i=0,...,r-1} q_V(uv_i, v_{-i-1})\Big).$$

Soient π, resp. ρ, une représentation admissible irréductible de $G(F)$, resp. $H(F)$, dans un espace complexe E_π, resp. E_ρ. On note $Hom_{H,\xi}(\pi, \rho)$ l'espace des applications linéaires $\varphi : E_\pi \to E_\rho$ telles que

$$\varphi(\pi(hu)e) = \xi(u)\rho(h)\varphi(e)$$

pour tous $u \in U(F)$, $h \in H(F)$, $e \in E_\pi$. On note $m(\rho, \pi)$ la dimension de cet espace. D'après [AGRS] théorème 1' et [GGP] corollaire 20.4, ce nombre vaut 0 ou 1. Il est indépendant des divers choix effectués.

Supposons G et H quasi-déployés sur F et affectons les notations d'un indice i : V_i, G_i etc... Supposons pour cette introduction $dim(W_i) \geq 3$. A équivalence près, il y a un unique espace quadratique que nous notons (V_a, q_{V_a}) tel que $dim(V_a) = dim(V_i)$, que les discriminants de q_{V_i} et q_{V_a} soient égaux mais leurs indices de Witt soient distincts. On introduit de même un espace quadratique (W_a, q_{W_a}). Le couple (V_a, W_a) vérifie les mêmes propriétés que ci-dessus. Les groupes spéciaux orthogonaux G_a, resp. H_a, de V_a, resp. W_a, sont des formes intérieures de G_i, resp. H_i. On note $Temp(G_i)$, $Temp(G_a)$ etc... les ensembles de représentations tempérées et irréductibles de $G_i(F)$, $G_a(F)$ etc... On admet que ces ensembles sont unions disjointes de L-paquets vérifiant certaines propriétés encore conjecturales. Précisément on admet les propriétés (1), (2) et (3) de [W1] 13.2. Soient Π_i, resp. Σ_i, un L-paquet dans $Temp(G_i)$, resp. $Temp(H_i)$. Il peut correspondre à Π_i un L-paquet dans $Temp(G_a)$, que l'on note Π_a. Ou bien il n'y a pas de tel L-paquet et on pose $\Pi_a = \emptyset$. On définit de même Σ_a. La multiplicité $m(\rho, \pi)$ est bien définie pour tout $(\rho, \pi) \in (\Sigma_i \times \Pi_i) \cup (\Sigma_a \times \Pi_a)$.

Théorème. *Sous ces hypothèses, il existe un unique couple* $(\rho, \pi) \in (\Sigma_i \times \Pi_i) \cup (\Sigma_a \times \Pi_a)$ *tel que* $m(\rho, \pi) = 1$.

C'est une partie de la conjecture 6.9 de [GP]. Ce théorème résulte aisément d'une formule qui calcule $m(\rho, \pi)$ comme une somme d'intégrales de fonctions qui se déduisent des caractères de ρ et π. Plus précisément, revenons aux notations sans indices du début de cette introduction. Soient π et ρ des représentations admissibles irréductibles de $G(F)$ et $H(F)$. On introduit une expression $m_{geom}(\rho, \pi)$ pour la définition de laquelle on renvoie à l'introduction de [W1].

Théorème. *Supposons* π *et* ρ *tempérées et irréductibles. Alors on a l'égalité* $m(\rho, \pi) = m_{geom}(\rho, \pi)$.

Dans [W1], on avait démontré cette égalité sous les hypothèses que π était cuspidale et ρ admissible. Ici, on élargit l'hypothèse sur π qui n'est plus que tempérée. Par contre, on impose une hypothèse plus forte à ρ qui est elle-aussi tempérée. Comme dans [W1], le second théorème implique le premier. Evidemment, dans [W1], l'hypothèse de cuspidalité présente dans le second théorème se retrouvait dans le premier. C'est cette hypothèse que nous faisons disparaître dans le présent article.

Décrivons l'idée principale de la preuve du second théorème. Rappelons que, pour une fonction $f \in C_c^\infty(G(F))$, on dit que f est très cuspidale si et seulement si, pour tout sous-groupe parabolique propre $P = MU$ de G (avec une notation familière) et pour tout $m \in M(F)$, on a l'égalité

$$\int_{U(F)} f(mu)du = 0.$$

Soient $\rho \in Temp(H)$ et f une fonction très cuspidale sur $G(F)$. On note θ_ρ le caractère de ρ. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on introduit une fonction κ_N sur $G(F)$ qui est la fonction caractéristique de l'image réciproque d'un sous-ensemble compact de $H(F)U(F)\backslash G(F)$ qui est de plus en plus grand quand N tend vers l'infini. Posons

$$I_N(\theta_\rho, f) = \int_{H(F)U(F)\backslash G(F)} \int_{H(F)} \int_{U(F)} \theta_\rho(h) f(g^{-1}hug)\xi(u)\kappa_N(g) du\, dh\, dg.$$

On montre que, quand N tend vers l'infini, cette expression a une limite. En fait, et c'est cela qui est fructueux, il y a deux façons de calculer la limite. L'une, que l'on peut qualifier de géométrique, a été développée en [W1], et conduit à une égalité

$$lim_{N\to\infty} I_N(\theta_\rho, f) = I_{geom}(\theta_\rho, f),$$

où le membre de droite est une somme d'intégrales sur certains sous-tores de $H(F)$. Dans le présent article, on calcule la limite d'une autre façon, que l'on peut qualifier de spectrale. On obtient une égalité (cf. théorème 6.1) :

$$lim_{N\to\infty}I_N(\theta_\rho,f)=I_{spec}(\theta_\rho,f),$$

où

$$I_{spec}(\theta_\rho,f)=\sum_{L\in\mathcal{L}(M_{min})}|W^L||W^G|^{-1}(-1)^{a_L}\sum_{\mathcal{O}\in\{\Pi_{ell}(L)\};m(\mathcal{O},\rho)=1}$$

$$[i\mathcal{A}_{\mathcal{O}}^\vee:i\mathcal{A}_{L,F}^\vee]^{-1}t(\pi)^{-1}\int_{i\mathcal{A}_{L,F}^*}J_L^G(\pi_\lambda,f)d\lambda.$$

Tous les termes de cette formule seront définis dans l'article. Disons simplement ici que, dans le cas où $L=G$, les objets $\mathcal{O}$ sont simplement les représentations irréductibles tempérées et elliptiques de $G(F)$ et, si l'on pose plus simplement $\pi=\mathcal{O}$, la condition $m(\mathcal{O},\rho)=1$ n'est autre que $m(\rho,\pi)=1$ tandis que $J_G^G(\pi,f)=\theta_\pi(f)$. Pour L quelconque, $J_L^G(\pi_\lambda,f)$ est la valeur sur f du caractère pondéré associé à π_λ.

On a donc l'égalité

$$I_{geom}(\theta_\rho,f)=I_{spec}(\theta_\rho,f)$$

qui, bien sûr, rappelle fortement la formule des traces locale d'Arthur. De fait, la preuve reprend très largement celle de [A3]. Dans les deux membres de la formule apparaissent des distributions qui ne sont pas invariantes : intégrales orbitales pondérées et caractères pondérés. Le procédé mis au point par Arthur, appliqué en particulier dans [A5] à la formule des traces locale, permet de transformer la formule ci-dessus en une autre où n'apparaissent que des distributions invariantes. Le terme de droite de cette formule continue de distinguer les représentations π de $G(F)$ telles que $m(\rho,\pi)=1$. Le second théorème résulte facilement de cette formule "invariante".

Expliquons encore deux points. Dans la formule non invariante, la fonction f est supposée très cuspidale, ce qui est assez restrictif. Cela parce que nous ne savons pas calculer la limite de $I_N(\theta_\rho,f)$ pour une fonction qui ne vérifie pas cette hypothèse (le résultat rend d'ailleurs douteuse la possibilité d'étendre nos calculs à des fonctions ne vérifiant pas cette hypothèse). Mais, une fois la formule rendue invariante, on peut supposer f seulement cuspidale (c'est-à-dire les intégrales orbitales $J^G(x,f)$ sont nulles pour tout élément $x\in G(F)$ qui est semi-simple, fortement régulier et non elliptique). Cela résulte du lemme suivant (lemme 2.7).

Lemme. *Soit $f\in C_c^\infty(G(F))$ une fonction cuspidale. Alors il existe une fonction très cuspidale $f'\in C_c^\infty(G(F))$ telle que $D(f)=D(f')$ pour toute distribution D sur $G(F)$ invariante par conjugaison.*

Cet affaiblissement de la condition sur f est nécessaire pour achever la preuve (on prend pour f un pseudo-coefficient d'une représentation tempérée et elliptique).

Le deuxième point est l'apparition de la condition $m(\rho,\pi)=1$ dans le terme $I_{spec}(\theta_\rho,f)$. Fixons ici une représentation $\pi\in Temp(G)$. L'espace $Hom_{H,\xi}(\pi,\rho)$ dont $m(\rho,\pi)$ est la dimension est défini de façon abstraite. Il ne peut pas intervenir directement dans $I_{spec}(\theta_\rho,f)$ qui est une intégrale explicite. Ce qui intervient dans ce terme, c'est la forme sesquilinéaire $\mathcal{L}_{\pi,\rho}$ sur $E_\rho\otimes_{\mathbb{C}}E_\pi$ définie par

$$\mathcal{L}_{\pi,\rho}(\epsilon'\otimes e',\epsilon\otimes e)=\int_{H(F)U(F)}(\rho(h)\epsilon',\epsilon)(e',\pi(hu)e)\bar{\xi}(u)du\,dh,$$

pour $\epsilon, \epsilon' \in E_\rho$ et $e, e' \in E_\pi$ (les produits $(.,)$ sont des produits hermitiens invariants sur E_ρ et E_π). L'intégrale ci-dessus n'est pas absolument convergente, mais on peut la définir comme une limite d'intégrales absolument convergentes, cf. 5.1. Négligeons cette question de convergence. Fixons ϵ et e'. Définissons une application $l : E_\pi \to E_\rho$ par l'égalité $(\epsilon', l(e)) = \mathcal{L}_{\pi,\rho}(\epsilon' \otimes e', \epsilon \otimes e)$ pour tous $\epsilon' \in E_\rho$ et $e \in E_\pi$. On vérifie que $l \in Hom_{H,\xi}(\pi, \rho)$. Si $\mathcal{L}_{\pi,\rho}$ n'est pas nulle, cet espace $Hom_{H,\xi}(\pi, \rho)$ ne l'est pas non plus et $m(\rho, \pi) = 1$. On a besoin de la réciproque, qui s'avère vraie.

Proposition. *Soient $\pi \in Temp(G)$ et $\rho \in Temp(H)$. Alors $m(\rho, \pi) = 1$ si et seulement si la forme sesquilinéaire $\mathcal{L}_{\pi,\rho}$ est non nulle.*

Cf. proposition 5.7. Signalons que cette façon concrète de construire l'espace $Hom_{H,\xi}(\pi, \rho)$ se trouve déjà dans l'article [II] de Ikeda et Ichino.

La première section est consacrée aux notations et à des rappels sur les opérateurs d'entrelacement et la formule de Plancherel. La deuxième l'est aux propriétés des fonctions cuspidales ou très cuspidales et aux quasi-caractères qu'elles permettent de définir. Les sections 3 et 4 sont franchement pénibles. On y démontre diverses majorations nécessaires pour la suite (pour le groupe GL_k dans la section 3, pour un groupe spécial orthogonal dans la section 4). On s'inspire ici plus que largement des travaux d'Harish-Chandra. Signalons à ce propos que l'on fait constamment référence à l'article [W2]. Mais l'apparence est trompeuse puisque dans [W2], on s'était contenté de rédiger des résultats non publiés d'Harish-Chandra. D'autre part, dans [W2], on avait cru judicieux de modifier la définition de l'homomorphisme habituel H_G en y glissant un signe $-$. On persiste à penser que, sur un corps de base p-adique, c'est une meilleure définition. Mais, pour utiliser les résultats d'Arthur, il vaut mieux reprendre ses définitions. C'est ce que l'on fait, mais cela induit des changements de signe dans les références que l'on fera à [W2] : cela échange une chambre positive avec son opposée. La section 5 est consacrée à la définition et l'étude des formes sesquilinéaires $\mathcal{L}_{\pi,\rho}$ évoquées ci-dessus. La preuve de l'égalité $lim_{N\to\infty} I_N(\theta_\rho, f) = I_{spec}(\theta_\rho, f)$ se trouve dans la section 6. Il s'agit pour l'essentiel de recopier [A3]. On en déduit dans la section 7 les deux théorèmes énoncés ci-dessus.

1 Notations et rappels

1.1 Notations générales

On utilise les notations introduites dans [W1], qui sont la plupart du temps celles d'Arthur et d'Harish-Chandra. Soit F un corps local non archimédien de caractéristique nulle. On note $\mathfrak{o}_F$ son anneau d'entiers, $\mathfrak{p}_F$ l'idéal maximal de $\mathfrak{o}_F$, q le nombre d'éléments du corps résiduel, val_F et $|.|_F$ les valuation et valeur absolue usuelles et on fixe une uniformisante ϖ_F. Soit G un groupe réductif connexe défini sur F. On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. On note A_G le plus grand tore déployé central dans G, $X(G)$ le groupe des caractères de G définis sur F, $\mathcal{A}_G = Hom(X(G), \mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_G^* = X(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ le dual de $\mathcal{A}_G$. On définit l'homomorphisme habituel $H_G : G(F) \to \mathcal{A}_G$. On note $\mathcal{A}_{G,F}$, resp. $\tilde{\mathcal{A}}_{G,F}$, l'image de $G(F)$, resp. $A_G(F)$, par cet homomorphisme. On note $\mathcal{A}_{G,F}^\vee$, resp. $\tilde{\mathcal{A}}_{G,F}^\vee$, le sous-groupe des $\lambda \in \mathcal{A}_G^*$ tels que $\lambda(\zeta) \in 2\pi\mathbb{Z}$ pour tout $\zeta \in \mathcal{A}_{G,F}$, resp. $\zeta \in \tilde{\mathcal{A}}_{G,F}$. On note a_G la dimension de $\mathcal{A}_G$.

Soit K un sous-groupe compact spécial de $G(F)$. Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique de G. Rappelons nos conventions : P est implicitement supposé défini sur F et la notation $P = MU$ signifie que M est une composante de Lévi de P, définie sur F, et U est le radical unipotent de P. Supposons que K soit en bonne position relativement à M. Précisément, il existe un sous-tore déployé maximal A_0 de M tel que K fixe un point de l'appartement associé à A_0 dans l'immeuble de G. On a l'égalité $G(F) = M(F)U(F)K$. Pour tout $g \in G(F)$, on fixe des éléments $m_P(g) \in M(F)$, $u_P(g) \in U(F)$, $k_P(g) \in K$ tels que $g = m_P(g)u_P(g)k_P(g)$. On prolonge l'application $H_M : M(F) \to \mathcal{A}_M$ en une fonction $H_P : G(F) \to \mathcal{A}_M$ par $H_P(g) = H_M(m_P(g))$.

Supposons fixé un Lévi minimal M_{min} de G. On pose $W^G = Norm_{G(F)}(M_{min})/M_{min}(F)$.

On note Ξ^G la fonction d'Harish-Chandra ([W2] II.1). Elle dépend de K. Mais elle ne nous sert qu'à résoudre des questions de majorations. Or changer de groupe K remplace Ξ^G par une fonction équivalente. Il est donc loisible d'utiliser cette fonction sans préciser le groupe K qui permet de la définir. On utilise aussi la fonction σ. Rappelons que, dans [W1], on a légèrement modifié la définition d'Harish-Chandra en posant $\sigma(g) = sup(1, log(||g||))$. On a la relation $\sigma(gg') \leq \sigma(g) + \sigma(g') \leq 2\sigma(g)\sigma(g')$ pour tous $g, g' \in G(F)$. Pour tout réel $b \geq 0$, on note $\mathbf{1}_{\sigma<b}$, resp. $\mathbf{1}_{\sigma\geq b}$, la fonction caractéristique de l'ensemble des $g \in G(F)$ tels que $\sigma(g) < b$, resp. $\sigma(g) \geq b$.

Quand deux nombres réels positifs ou nuls a et b dépendent d'un certain nombre de variables $x_1, ..., x_n$, on dit que a est essentiellement majoré par b, ce que l'on note $a << b$, s'il existe un réel $c > 0$ tel que $a \leq cb$ pour tous $x_1, ..., x_n$. Cette notation est quelque peu imprécise mais nous évite d'introduire une kyrielle de constantes superflues.

On introduit l'espace $\mathcal{S}(G(F))$ des fonctions de Schwartz-Harish-Chandra sur $G(F)$. C'est l'ensemble des fonctions $f : G(F) \to \mathbb{C}$ qui sont biinvariantes par un sous-groupe ouvert compact et telles que, pour tout réel $R \geq 0$, on ait une majoration

$$|f(g)| << \Xi^G(g)\sigma(g)^{-R}$$

pour tout $g \in G(F)$. L'espace $\mathcal{S}(G(F))$ contient l'espace $C_c^\infty(G(F))$ des fonctions localement constantes à support compact.

Soit π une représentation admissible de $G(F)$. On note sans plus de commentaire E_π un espace complexe dans lequel elle se réalise. Si K est un sous-groupe de $G(F)$, on note E_π^K le sous-espace des éléments de E_π invariants par K. Supposons π unitaire. On fixe une forme hermitienne définie positive $(.,.)$ sur E_π invariante par l'action de $G(F)$. On appelle une telle forme un produit scalaire invariant. Précisons notre convention sur les formes sesquilinéaires : la forme $(.,.)$ vérifie la relation $(\lambda' e', \lambda e) = \bar{\lambda}'\lambda(e', e)$ pour tous $\lambda, \lambda' \in \mathbb{C}$, $e, e' \in E_\pi$. Nous dirons que π est tempérée si elle est unitaire, de longueur finie, et qu'il existe un entier D tel que, pour tous $e, e' \in E_\pi$, on ait une majoration

$$|(e', \pi(g)e)| << \Xi^G(g)\sigma(g)^D.$$

En fait, l'entier D ne sert à rien : on peut prendre $D = 0$, cf. [W2] lemme VI.2.2. Supposons $G(F)$ muni d'une mesure de Haar. Si π est tempérée, l'action de $C_c^\infty(G(F))$ dans E_π se prolonge en une action de $\mathcal{S}(G(F))$. Pour $f \in \mathcal{S}(G(F))$ et $e, e' \in E_\pi$, on a l'égalité

$$(e', \pi(f)e) = \int_{G(F)} f(g)(e', \pi(g)e)dg.$$

Cette intégrale est absolument convergente. On note $Temp(G)$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations tempérées irréductibles de $G(F)$.

On fixe un caractère $\psi : F \to \mathbb{C}^\times$, continu et non trivial. On note c_ψ le plus petit entier relatif c tel que ψ soit trivial sur $\mathfrak{p}_F^c$.

1.2 Mesures

Dans la suite de l'article, la situation sera la suivante. Le groupe G est fixé, ainsi qu'un Lévi minimal M_{min} de G et un sous-groupe compact spécial K de $G(F)$, en bonne position relativement à M_{min}.

On munit K de la mesure de Haar de masse totale 1. On munit $G(F)$ d'une mesure de Haar (pour laquelle $mes(K)$ n'est pas forcément égale à 1). Soit $P = MU \in \mathcal{F}(M_{min})$ (les notations $\mathcal{F}(L)$, $\mathcal{P}(L)$, $\mathcal{L}(L)$ sont celles d'Arthur, cf. [W1] 1.1). On munit $U(F)$ de l'unique mesure de Haar telle que

$$\int_{U(F)} \delta_{\bar{P}}(m_{\bar{P}}(u))du = 1,$$

où $\bar{P} = M\bar{U}$ est le parabolique opposé à P et $\delta_{\bar{P}}$ est le module usuel. On munit $M(F)$ de l'unique mesure de Haar telle que, pour toute $f \in C_c^\infty(G(F))$, on ait l'égalité

$$\int_{G(F)} f(g)dg = \int_K \int_{U(F)} \int_{M(F)} f(muk)dm\,du\,dk.$$

Le point est que cette mesure sur $M(F)$ ne dépend pas du sous-groupe parabolique $P \in \mathcal{P}(M)$ utilisé pour la définir ([A3] 1.2).

On munit l'espace $i\mathcal{A}_M^* \subset \mathcal{A}_M^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ de la mesure de Haar telle que le quotient $i\mathcal{A}_M^*/i\tilde{\mathcal{A}}_{M,F}^\vee$ soit de mesure 1. On pose $i\mathcal{A}_{M,F}^* = i\mathcal{A}_M/i\mathcal{A}_{M,F}^\vee$ et on le munit de la mesure telle que l'application naturelle de $i\mathcal{A}_M^*$ dans $i\mathcal{A}_{M,F}^*$ préserve localement les mesures.

Soit T un tore. Si T est déployé, on munit $T(F)$ de la mesure de Haar telle que le sous-groupe compact maximal de $T(F)$ soit de mesure 1. En général, on munit $A_T(F)$ de la mesure que l'on vient de définir et $T(F)$ de la mesure telle que $T(F)/A_T(F)$ soit de mesure 1 pour la mesure quotient.

Remarques. *1. Dans le cas où M_{min} est un tore, les définitions précédentes peuvent entrer en conflit. On croit qu'en pratique, il n'y aura pas d'ambigüité.*

2. Dans les sections 3, 4 et 5, on se préoccupera de questions de convergence pour lesquelles les choix de mesures sont sans importance. On ne tiendra pas compte des normalisations ci-dessus. On supposera au contraire que les mesures sont choisies de telle sorte que toutes les constantes qui apparaissent à cause d'elles dans les calculs soient égales à 1.

1.3 Représentations induites, opérateurs d'entrelacement

Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique de G et τ une représentation admissible de $M(F)$. On définit la représentation induite $Ind_P^G(\tau)$. On note $E_{P,\tau}^G$ son espace. C'est celui des fonctions $e : G(F) \to E_\tau$ qui sont invariantes à droite par un sous-groupe ouvert compact de $G(F)$ et vérifient

$$e(mug) = \delta_P(m)^{1/2}\tau(m)e(g)$$

pour tous $m \in M(F)$, $u \in U(F)$ et $g \in G(F)$. Pour $g \in G(F)$, ou $f \in C_c^\infty(G(F))$, on note $Ind_P^G(\tau, g)$, ou $Ind_P^G(\tau, f)$, l'action de g, ou f, dans $E_{P,\tau}^G$. Pour $\lambda \in \mathcal{A}_M^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, on définit la représentation τ_λ de $M(F)$ par $\tau_\lambda(m) = exp(\lambda(H_M(m)))\tau(m)$ et la représentation induite $Ind_P^G(\tau_\lambda)$. Remarquons que ces représentations ne dépendent que de l'image de λ dans $(\mathcal{A}_M^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})/i\mathcal{A}_{M,F}^\vee$. Supposons $M_{min} \subset M$. Notons $\mathcal{K}_{P,\tau}^G$ l'espace des fonctions $e : K \to E_\tau$ qui sont invariantes à droite par un sous-groupe ouvert compact de K et vérifient la même relation que ci-dessus, pour $m \in K \cap M(F)$, $u \in K \cap U(F)$ et $g \in K$. Par restriction à K, E_{P,τ_λ}^G s'identifie à $\mathcal{K}_{P,\tau}^G$, ce dernier espace est donc un modèle commun à toutes les représentations $Ind_P^G(\tau_\lambda)$. Supposons τ unitaire. On définit un produit hermitien sur $\mathcal{K}_{P,\tau}^G$ par

$$(e', e) = \int_K (e'(k), e(k))dk.$$

C'est un produit scalaire invariant pour la représentation $Ind_P^G(\tau_\lambda)$ pour tout $\lambda \in i\mathcal{A}_{M,F}^*$.

Laissons M fixé mais faisons varier P parmi les éléments de $\mathcal{P}(M)$. Pour $P = MU, P' = MU' \in \mathcal{P}(M)$ et $\lambda \in \mathcal{A}_M^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, on définit l'opérateur d'entrelacement

$$J_{P'|P}(\tau_\lambda) : E_{P,\tau_\lambda}^G \to E_{P',\tau_\lambda}^G$$

Quand la partie réelle de λ est dans un certain cône, il est défini par la formule

$$(J_{P'|P}(\tau_\lambda)e)(g) = \int_{(U(F)\cap U'(F))\backslash U'(F)} e(ug)du.$$

En général, il est défini par prolongement méromorphe (il est même rationnel, si l'on considère $(\mathcal{A}_M^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})/i\mathcal{A}_{M,F}^\vee$ comme un tore algébrique complexe). Par restriction à K, on peut considérer $J_{P'|P}(\tau_\lambda)$ comme un homomorphisme de $\mathcal{K}_{P,\tau}^G$ dans $\mathcal{K}_{P',\tau}^G$. C'est ce point de vue que l'on adopte dans la suite.

Supposons τ irréductible. L'opérateur $J_{P|\bar{P}}(\tau_\lambda)J_{\bar{P}|P}(\tau_\lambda)$ est une homothétie. Notons $j(\tau_\lambda)$ le rapport d'homothétie. Il ne dépend pas de P. On peut normaliser l'opérateur d'entrelacement. On introduit une fonction $r_{P'|P}(\tau_\lambda)$ à valeurs complexes, qui est méromorphe et même rationnelle, de sorte qu'en posant

$$R_{P'|P}(\tau_\lambda) = r_{P'|P}(\tau_\lambda)^{-1}J_{P'|P}(\tau_\lambda),$$

cet opérateur vérifie les conditions du théorème 2.1 de [A4]. Les principales conditions sont

- pour $P, P', P'' \in \mathcal{P}(M)$, $R_{P''|P'}(\tau_\lambda)R_{P'|P}(\tau_\lambda) = R_{P''|P}(\tau_\lambda)$;

- supposons τ tempérée ; pour $\lambda \in i\mathcal{A}_{M,F}^*$, $R_{P'|P}(\tau_\lambda)$ est holomorphe et son adjoint pour le produit scalaire est $R_{P|P'}(\tau_\lambda)$.

La définition des opérateurs normalisés s'étend au cas où τ est semi-simple. En particulier, soit $P^M = M_0U_0^M$ un sous-groupe parabolique de M tel que $M_{min} \subset M_0$, soit τ_0 une représentation tempérée irréductible de $M_0(F)$, supposons que $\tau = Ind_{P^M}^M(\tau_0)$. Pour $P = MU \in \mathcal{P}(M)$, introduisons le groupe $P_0 = P^MU \in \mathcal{P}(M_0)$. L'espace $\mathcal{K}_{P,\tau}^G$ s'identifie à $\mathcal{K}_{P_0,\tau_0}^G$. Pour $P, P' \in \mathcal{P}(M)$ et $\lambda \in i\mathcal{A}_{M,F}^*$, l'opérateur $R_{P'|P}(\tau_\lambda)$ s'identifie à $R_{P_0'|P_0}(\tau_{0,\lambda})$.

1.4 Caractères pondérés

On conserve les données M et τ du paragraphe précédent. On suppose que τ est tempérée, donc semi-simple d'après la définition que l'on a adoptée. Pour tous $P, P' \in \mathcal{P}(M)$, l'opérateur $R_{P'|P}(\tau)$ est bien défini et inversible. Plus généralement, pour tout $\lambda \in i\mathcal{A}_M^*$, l'opérateur $R_{P'|P}(\tau_\lambda)$ est bien défini et inversible. Fixons P. Pour tout $P' \in \mathcal{P}(M)$, considérons la fonction $\mathcal{R}_{P'}(\tau)$ sur $i\mathcal{A}_M^*$ définie par

$$\mathcal{R}_{P'}(\tau, \lambda) = R_{P'|P}(\tau)^{-1} R_{P'|P}(\tau_\lambda).$$

Elle prend ses valeurs dans l'espace d'endomorphismes de $\mathcal{K}^G_{P,\tau}$. La famille $(\mathcal{R}_{P'}(\tau))_{P' \in \mathcal{P}(M)}$ est une (G, M)-famille à valeurs opérateurs ([A1] paragraphe 7). Cela entraîne que la fonction

$$\lambda \mapsto \sum_{P' \in \mathcal{P}(M)} \mathcal{R}_{P'}(\tau, \lambda)\theta_{P'}(\lambda)^{-1}$$

sur $i\mathcal{A}_M^*$ est C^∞ (la fonction $\theta_{P'}$ est définie en [A1] p.15). On note $\mathcal{R}_M(\tau)$ la valeur de cette fonction en $\lambda = 0$. C'est un endomorphisme de $\mathcal{K}_{P,\tau}$. Plus généralement, soient $\tilde{M} \in \mathcal{L}(M)$ et $Q = LU \in \mathcal{F}(\tilde{M})$. On définit une $(L, \tilde{M})$-famille $(\mathcal{R}^Q_{\tilde{P}^L}(\tau))_{\tilde{P}^L \in \mathcal{P}^L(\tilde{M})}$ de la façon suivante : $\mathcal{R}^Q_{\tilde{P}^L}(\tau)$ est la restriction à $i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}}$ de la fonction $\mathcal{R}_{P'}(\tau)$, où P' est un élément quelconque de $\mathcal{P}(M)$ tel que $P' \subset Q$ et $P' \cap L \subset \tilde{P}^L$. Comme ci-dessus, on associe à cette $(L, \tilde{M})$-famille un opérateur $\mathcal{R}^Q_{\tilde{M}}(\tau)$.

Le caractère pondéré de la représentation τ est la distribution $f \mapsto J^G_M(\tau, f)$définie par

$$J^G_M(\tau, f) = trace(\mathcal{R}_M(\tau) Ind^G_P(f))$$

pour toute $f \in C_c^\infty(G(F))$. Cette distribution est définie à l'aide du sous-groupe parabolique P que nous avons fixé, mais on montre qu'elle ne dépend pas de ce choix. Plus généralement, pour $\tilde{M}$ et Q comme ci-dessus, on définit une distribution $f \mapsto J^Q_{\tilde{M}}(\tau, f)$.

Dans le cas où $M = G$, on pose simplement $\theta_\tau(f) = J^G_G(\tau, f)$. La distribution $f \mapsto \theta_\tau(f)$ est le caractère usuel de τ.

1.5 Le R-groupe

Soient M un Lévi de G et τ une représentation admissible de $M(F)$. Soit $g \in G(F)$. On définit la représentation $g\tau$ de $gM(F)g^{-1}$ par $(g\tau)(gmg^{-1}) = \tau(m)$. Son espace $E_{g\tau}$ est égal à E_τ. Sa classe d'isomorphie ne dépend que de l'image de g dans l'ensemble de classes $G(F)/M(F)$. La conjugaison par g induit un isomorphisme de $\mathcal{A}_M^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ sur $\mathcal{A}^*_{gMg^{-1}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ que l'on note $\lambda \mapsto g\lambda$. On a l'égalité $g(\tau_\lambda) = (g\tau)_{g\lambda}$ pour tout $\lambda \in \mathcal{A}_M^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Supposons $M_{min} \subset M$ et τ irréductible et de la série discrète. Notons $Norm_{G(F)}(\tau)$ le sous-groupe des $g \in Norm_{G(F)}(M)$ tels que $g\tau \simeq \tau$. Posons $W(\tau) = Norm_{G(F)}(\tau)/M(F)$. Simplifions la théorie en supposant vérifiées les conditions suivantes :

- la représentation τ se prolonge en une représentation τ^N de $Norm_{G(F)}(\tau)$;

- l'homomorphisme naturel de $K \cap Norm_{G(F)}(\tau)$ dans $W(\tau)$ admet une section ι qui est un homomorphisme de groupes.

Fixons τ^N et ι. Pour simplifier la notation, on identifie tout élément w de $W(\tau)$ à son image $\iota(w)$. Remarquons que τ^N est nécessairement unitaire. Pour $P \in \mathcal{P}(M)$ et $w \in W(\tau)$, on définit un homomorphisme

$$A_P(w) : \mathcal{K}^G_{w^{-1}Pw, w^{-1}\tau} \to \mathcal{K}^G_{P,\tau}$$

par $(A_P(w)e)(k) = \tau^N(w)e(w^{-1}k)$. Pour $\lambda \in i\mathcal{A}^*_{M,F}$, on définit un endomomorphisme $R_P(w, \tau_\lambda)$ de $\mathcal{K}^G_{P,\tau}$ par

$$R_P(w, \tau_\lambda) = A_P(w)R_{w^{-1}Pw|P}(\tau_\lambda) = R_{P|wPw^{-1}}((w\tau)_{w\lambda})A_{wPw^{-1}}(w).$$

C'est un opérateur unitaire. On a la relation d'entrelacement

$$Ind^G_P((w\tau)_{w\lambda}, g)R_P(w, \tau_\lambda) = R_P(w, \tau_\lambda)Ind_P(\tau_\lambda, g)$$

et la relation de composition

$$R_P(w_1w_2, \tau_\lambda) = R_P(w_1, \tau_{w_2\lambda})R_P(w_2, \lambda).$$

Apppliquons ceci pour $\lambda = 0$. Notons $W'(\tau)$ le sous-groupe des $w \in W(\tau)$ tels que $R_P(w, \tau)$ soit une homothétie. C'est le groupe de Weyl d'un système de racines Σ' dont tout élément est proportionnel à une racine de A_M dans $\mathfrak{g}$. Ce système est conservé par l'action de $W(\tau)$. Fixons un sous-ensemble Σ'^+ de racines positives et notons $R(\tau)$ le sous-groupe des éléments de $W(\tau)$ qui conservent Σ'^+. On a la décomposition $W(\tau) = W'(\tau) \rtimes R(\tau)$. L'application $w \mapsto R_P(w, \tau)$ se prolonge en un isomorphisme de l'algèbre de groupe $\mathbb{C}[R(\tau)]$ sur l'algèbre commutante de la représentation $Ind^G_P(\tau)$. Ces propriétés forment la théorie du R-groupe, qui est due à Silberger dans le cas p-adique.

Simplifions encore en supposant le groupe $R(\tau)$ abélien. On note $R(\tau)^\vee$ le groupe dual de $R(\tau)$. Pour tout caractère $\zeta \in R(\tau)^\vee$, notons $\mathcal{K}^G_{P,\tau,\zeta}$ le sous-espace des éléments $e \in \mathcal{K}^G_{P,\tau}$ tels que $R_P(w, \tau)e = \zeta(w)e$ pour tout $w \in R(\tau)$. Alors $\mathcal{K}^G_{P,\tau,\zeta}$ est stable par la représentation $Ind^G_P(\tau)$. Notons $Ind^G_P(\tau, \zeta)$ la restriction de $Ind^G_P(\tau)$ à ce sous-espace. Alors $Ind^G_P(\tau, \zeta)$ est irréductible, sa classe ne dépend pas de P et $Ind^G_P(\tau, \zeta)$ est isomorphe à $Ind^G_P(\tau, \zeta')$ si et seulement si $\zeta = \zeta'$.

Soit π une représentation admissible de $G(F)$. On dit qu'elle est proprement induite s'il existe un élément $Q = LU \in \mathcal{F}(M_{min})$ et une représentation admissible irréductible σ de $L(F)$ tels que $Q \neq G$ et $\pi \simeq Ind^G_Q(\sigma)$. Soit $\pi \in Temp(G)$. Nous dirons que π est elliptique si elle n'est pas proprement induite. Revenons à la situation précédente. Notons $W(M) = Norm_{G(F)}(M)/M(F)$ et $W(M)_{reg}$ le sous-ensemble des éléments de $W(M)$ qui opèrent sans points fixes non nuls sur $\mathcal{A}_M/\mathcal{A}_G$. Une représentation $Ind^G_P(\tau, \zeta)$ comme ci-dessus est elliptique si et seulement si $R(\tau) \cap W(M)_{reg} \neq \emptyset$. Si cette condition est vérifiée, on a $W'(\tau) = \{1\}$. Inversement, pour toute représentation elliptique $\pi \in Temp(G)$, il existe M, τ et ζ vérifiant toutes les conditions ci-dessus de sorte que $\pi \simeq Ind^G_P(\tau, \zeta)$. La classe de conjugaison par W^G du triplet (M, τ, ζ) est bien déterminée.

1.6 La formule de Plancherel-Harish-Chandra

Pour tout $M \in \mathcal{L}(M_{min})$, fixons un élément $P \in \mathcal{P}(M)$. Notons $\Pi_2(M)$ l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations irréductibles et de la série discrète de $M(F)$. Cet ensemble se décompose en orbites pour l'action $\tau \mapsto \tau_\lambda$ de $i\mathcal{A}^*_{M,F}$. Notons $\{\Pi_2(M)\}$ l'ensemble des orbites. Pour chaque orbite $\mathcal{O}$, fixons un élément τ de cette orbite. Notons $i\mathcal{A}^\vee_{\mathcal{O}}$ le groupe des $\lambda \in i\mathcal{A}^*_M$ tels que les représentations τ et τ_λ soient équivalentes. Pour tout $\lambda \in i\mathcal{A}^*_M$, on définit la mesure de Plancherel

$$m(\tau_\lambda) = j(\tau_\lambda)^{-1}d(\tau),$$

où $d(\tau)$ est le degré formel de τ. Soit $f \in \mathcal{S}(G(F))$. La formule de Plancherel-Harish-Chandra affirme l'égalité

$$f(g) = \sum_{M \in \mathcal{L}(M_{min})} |W^M||W^G|^{-1} \sum_{\mathcal{O} \in \{\Pi_2(M)\}} [i\mathcal{A}_{\mathcal{O}}^\vee : i\mathcal{A}_{M,F}^\vee]^{-1}$$

$$\int_{i\mathcal{A}_{M,F}^*} m(\tau_\lambda) trace(Ind_P^G(\tau_\lambda, g^{-1}) Ind_P^G(\tau_\lambda, f)) d\lambda$$

pour tout $g \in G(F)$. Seules interviennent de façon non nulle les orbites $\mathcal{O}$ pour lesquelles une représentation $Ind_P^G(\tau_\lambda)$ admet des vecteurs non nuls invariants par un sous-groupe ouvert compact de $G(F)$ tel que f soit biinvariante par ce sous-groupe. Ces orbites sont en nombre fini. La formule ci-dessus est démontrée dans [W2] théorème VIII.1.1. Dans cette référence, il y a quelques constantes supplémentaires dues aux normalisations différentes des mesures. Arthur a introduit les normalisations que nous utilisons et qui font disparaître ces constantes.

Nous aurons aussi besoin d'une autre formule. Fixons $P = MU \in \mathcal{F}(M_{min})$ et une représentation admissible irréductible τ de $M(F)$, de la série discrète. Soient $e, e' \in \mathcal{K}_{P,\tau}^G$ et φ une fonction C^∞ sur $i\mathcal{A}_{M,F}^*$. Définissons une fonction $f_{e,e',\varphi}$ sur $G(F)$ par

$$f(g) = \int_{i\mathcal{A}_{M,F}^*} \varphi(\lambda)(Ind_P^G(\tau_\lambda, g)e', e) m(\tau_\lambda) d\lambda.$$

Cette fonction appartient à $\mathcal{S}(G(F))$. Identifions tout élément de $W(M)$ à un représentant dans $K \cap Norm_{G(F)}(M)$. Notons $\mathcal{E}(\tau)$ l'ensemble des couples $(w, \mu) \in W(M) \times i\mathcal{A}_{M,F}^*$ tels que $w^{-1}\tau \simeq \tau_\mu$. Pour $(w, \mu) \in \mathcal{E}(\tau)$, fixons un automorphisme unitaire $\tau(w, \mu)$ de $\mathcal{K}_{P,\tau}^G$ tel que

$$\tau(w, \mu)\tau_\mu(m) = (w^{-1}\tau)(m)\tau(w, \mu)$$

pour tout $m \in M(F)$. Définissons l'homomorphisme $A(w, \mu) : \mathcal{K}_{w^{-1}Pw,\tau}^G \to \mathcal{K}_{P,\tau}^G$ par

$$(A(w, \mu)e)(g) = \tau(w, \mu)e(w^{-1}g).$$

Pour $\lambda \in i\mathcal{A}_{M,F}^*$, définissons l'endomorphisme $R(w, \mu, \lambda)$ de $\mathcal{K}_{P,\tau}^G$ par

$$R(w, \mu, \lambda) = A(w, \mu) R_{w^{-1}Pw|P}(\tau_{\lambda+\mu}).$$

Il vérifie la relation d'entrelacement

$$R(w, \mu, \lambda) Ind_P^G(\tau_{\lambda+\mu}, g) = Ind_P^G(\tau_{w\lambda}, g) R(w, \mu, \lambda).$$

Posons simplement $R(w, \mu) = R(w, \mu, 0)$. Soient $e_0, e_0' \in \mathcal{K}_{P,\tau}^G$. Alors on a l'égalité

$$\int_{G(F)} f_{e,e',\varphi}(g)(e_0', Ind_P^G(\tau, g)e_0) dg = \sum_{(w,\mu) \in \mathcal{E}(\tau)} \varphi(\mu)(R(w, \mu)e', e_0)(e_0', R(w, \mu)e).$$

C'est une autre façon d'écrire la proposition VII.2 de [W2]. Ici encore, les constantes disparaissent grâce aux normalisations d'Arthur.

L'ensemble $\mathcal{E}(\tau)$ est fini, on peut donc choisir un voisinage ω de 0 dans $i\mathcal{A}_{M,F}^*$ tel que $(w, \mu) \in \mathcal{E}(\tau)$ et $\mu \in \omega$ entraînent $\mu = 0$. Evidemment l'application $w \mapsto (w, 0)$ est un isomorphisme de $W(\tau)$ sur le sous-ensemble des éléments de $\mathcal{E}(\tau)$ de la forme $(w, 0)$.

Supposons valides les hypothèses du paragraphe précédent. Pour $w \in W(\tau)$, l'opérateur $R(w,0)$ est égal au $R_P(w,\tau)$ du paragraphe précédent (du moins, on peut effectuer les divers choix de sorte qu'il en soit ainsi). Pour $w \in W'(\tau)$, c'est une homothétie dont le rapport est de module 1 par un argument d'unitarité. Seuls les éléments du R-groupe interviennent de façon non triviale dans la somme ci-dessus. On obtient alors

(1) supposons le support de φ contenu dans ω ; alors on a l'égalité

$$\int_{G(F)} f_{e,e',\varphi}(g)(e'_0, Ind_P^G(\tau,g)e_0)dg = |W'(\tau)|\varphi(0) \sum_{w\in R(\tau)} (R_P(w,\tau)e', e_0)(e'_0, R_P(w,\tau)e).$$

2 Fonctions très cuspidales

2.1 Un lemme d'annulation

Soit π une représentation admissible de $G(F)$. Introduisons sa contragrédiente $\check{\pi}$. Soient B une forme bilinéaire sur $E_{\check{\pi}} \times E_\pi$ et $f \in C_c^\infty(G(F))$. Fixons un sous-groupe ouvert compact K_f de $G(F)$ tel que f soit biinvariante par K_f. Fixons une base $\mathcal{B}^{K_f}$ du sous-espace $E_\pi^{K_f}$ et introduisons la base duale $\{\check{e}; e \in \mathcal{B}^{K_f}\}$ de $E_{\check{\pi}}^{K_f}$. Posons

$$trace_B(\pi(f)) = \sum_{e\in\mathcal{B}^{K_f}} B(\check{e}, \pi(f)e).$$

On vérifie que ce terme ne dépend ni du choix de K_f, ni de celui de la base. Remarquons que la trace usuelle $\theta_\pi(f))$ s'obtient comme cas particulier en prenant pour B l'accouplement naturel sur $E_{\check{\pi}} \times E_\pi$. On note $< .,. >$ cet accouplement.

Soient $P = MU \in \mathcal{F}(M_{min})$ et τ une représentation admissible de $M(F)$. Soient B une forme bilinéaire sur $E_{P,\check{\tau}}^G \times E_{P,\tau}^G$ et $f \in C_c^\infty(G(F))$. On impose les hypothèses suivantes

(1) $P \neq G$;

(2) f est très cuspidale (cf. [W1] 5.1) ;

(3) soient $e \in E_{P,\tau}^G$ et $e' \in E_{P,\check{\tau}}^G$ tels que $e'(g) \otimes e(g) = 0$ pour tout $g \in G(F)$; alors $B(e', e) = 0$.

Remarque. $e'(g) \otimes e(g)$ est un élément de $E_{\check{\tau}} \otimes_{\mathbb{C}} E_\tau$.

Lemme. *Sous ces hypothèses, on a* $trace_B(Ind_P^G(\tau, f)) = 0$.

Preuve. On fixe un sous-groupe ouvert compact K_f de K tel que f soit biinvariante par K_f. Fixons un ensemble de représentants Γ de l'ensemble de doubles classes $P(F)\backslash G(F)/K_f$. On peut choisir une base $\mathcal{B}^{K_f}$ de $(E_{P,\tau}^G)^{K_f}$ telle que, pour tout $e \in \mathcal{B}^{K_f}$, il existe $\gamma \in \Gamma$ de sorte que le support de e soit contenu dans $P(F)\gamma K_f$. L'élément correspondant $\check{e}$ de la base duale vérifie la même propriété, avec le même γ. Pour tout $e \in \mathcal{B}^{K_f}$, on a

$$Ind_P^G(\tau, f)e = \sum_{e'\in\mathcal{B}^{K_f}} < \check{e}', Ind_P^G(\tau,f)e > e',$$

d'où

$$trace_B(Ind_P^G(\tau, f)) = \sum_{e,e'\in\mathcal{B}^{K_f}} B(\check{e}, e') < \check{e}', Ind_P^G(\tau,f)e > .$$

Fixons $e, e' \in \mathcal{B}^{K_f}$. Il suffit de prouver que le terme indexé par e, e' dans cette somme est nul. Soient $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ tels que le support de e, resp. e', soit contenu dans $P(F)\gamma K_f$, resp. $P(F)\gamma' K_f$. Si $\gamma \neq \gamma'$, on a $\check{e}(g) \otimes e'(g) = 0$ pour tout $g \in G(F)$, donc $B(\check{e}, e') = 0$. Supposons $\gamma = \gamma'$. On a

$$< \check{e}', Ind_P^G(\tau, f)e >= \int_K \int_{G(F)} f(g) < \check{e}'(x), e(xg) > dg\, dx,$$

où l'accouplement intérieur est celui sur $E_{\check{\tau}} \times E_\tau$. On effectue le changement de variable $g \mapsto x^{-1}g$ puis on décompose g en $g = muk$, avec $m \in M(F)$, $u \in U(F)$, $k \in K$. D'où

$$< \check{e}', Ind_P^G(\tau, f)e >= \int_K \int_K \int_{M(F)} \int_{U(F)} f(x^{-1}muk)$$

$$< \check{e}'(x), \tau(m)e(k) > \delta_P(m)^{1/2} du\, dm\, dk\, dx.$$

Fixons x, k, m et supposons $< \check{e}'(x), \tau(m)e(k) > \neq 0$. Cela entraîne $x \in P(F)\gamma K_f$ et $k \in P(F)\gamma K_f$. Donc $k \in P(F)xK_f$. Ecrivons $k = m'u'xk'$, avec $m' \in M(F)$, $u' \in U(F)$, $k' \in K_f$ et considérons l'intégrale intérieure de la formule ci-dessus. Puisque f est invariante à droite par K_f, le k' disparaît. Par le changement de variable $u \mapsto m'uu'^{-1}m'^{-1}$, cette intégrale devient

$$\delta_P(m')^{1/2} \int_{U(F)} f(x^{-1}mm'ux)du.$$

Elle est nulle puisque f est très cuspidale. Donc $< \check{e}', Ind_P^G(\tau, f)e >= 0$, ce qui achève la preuve. $\square$

Ce lemme admet plusieurs variantes. Supposons $M_{min} \subset M$. Au lieu des modèles $E_{P,\tau}^G$ et $E_{P,\check{\tau}}^G$, on peut aussi considérer les modèles $\mathcal{K}_{P,\tau}^G$ et $\mathcal{K}_{P,\check{\tau}}^G$ et une forme bilinéaire B sur $\mathcal{K}_{P,\check{\tau}}^G \times \mathcal{K}_{P,\tau}^G$. Le lemme reste valide si l'on remplace l'hypothèse (3) par

(3') soient $e \in \mathcal{K}_{P,\tau}^G$ et $e' \in \mathcal{K}_{P,\check{\tau}}^G$ tels que $e'(k) \otimes e(k) = 0$ pour tout $k \in K$; alors $B(e', e) = 0$.

Dans le cas où τ unitaire, on peut aussi considérer une forme sesquilinéaire B sur $\mathcal{K}_{P,\tau} \times \mathcal{K}_{P,\tau}$ vérifiant la même condition (3'). Le lemme reste valide.

2.2 Caractères pondérés et fonctions très cuspidales

Soient $M \in \mathcal{L}(M_{min})$, τ une représentation tempérée de $M(F)$ et $f \in C_c^\infty(G(F))$.

Lemme. *Supposons f très cuspidale.*

(i) Soient $\tilde{M} \in \mathcal{L}(M)$ et $Q \in \mathcal{F}(\tilde{M})$. Si $\tilde{M} \neq M$ ou si $Q \neq G$, on a $J_{\tilde{M}}^Q(\tau, f) = 0$.

(ii) Si τ est proprement induite, on a $J_M^G(\tau, f) = 0$.

Preuve. Soit $Q = LU \in \mathcal{F}(M)$ tel que $Q \neq G$. Fixons $P \in \mathcal{P}(M)$ tel que $P \subset Q$. Pour $P' \in \mathcal{P}(M)$ tel que $P' \subset Q$, définissons une fonction $c_{P'}$ sur $i\mathcal{A}_M^*$ par

$$c_{P'}(\lambda) = trace(R_{P'|P}(\tau)^{-1} R_{P'|P}(\tau_\lambda) Ind_P^G(\tau, f)).$$

Il s'agit de la trace d'un endomorphisme de $\mathcal{K}_{P,\tau}^G$. Par définition, $J_M^Q(\tau, f)$ est la valeur en $\lambda = 0$ de la fonction

$$\sum_{P' \in \mathcal{P}(M); P' \subset Q} c_{P'}(\lambda) \theta_{P' \cap L}^L(\lambda)^{-1}.$$

Pour démontrer que $J_M^Q(\tau,f)=0$, il suffit de prouver que $c_{P'}(\lambda)=0$ pour tous P' et λ. Fixons P' et λ. Introduisons les représentations $\pi=Ind_{P\cap L}^L(\tau)$ et $\pi'=Ind_{P'\cap L}^L(\tau)$, que l'on réalise dans les espaces $\mathcal{K}_{P\cap L,\tau}^L$ et $\mathcal{K}_{P'\cap L,\tau}^L$. On peut identifier $\mathcal{K}_{P,\tau}^G$, resp. $\mathcal{K}_{P',\tau}^G$, à $\mathcal{K}_{Q,\pi}^G$, resp. $\mathcal{K}_{Q,\pi'}^G$. On dispose de l'opérateur $R_{P'\cap L|P\cap L}^L(\tau_\lambda):\mathcal{K}_{P\cap L,\tau}^L\to\mathcal{K}_{P'\cap L,\tau}^L$. Modulo les identifications précédentes, $R_{P'|P}(\tau_\lambda)$ s'identifie à l'opérateur $e\mapsto R_{P'\cap L|P\cap L}^L(\tau_\lambda)\circ e$ de $\mathcal{K}_{Q,\pi}^G$ dans $\mathcal{K}_{Q,\pi'}^G$. Il en est de même pour l'opérateur $R_{P'|P}(\tau)$. Introduisons la forme sesquilinéaire B sur $\mathcal{K}_{Q,\pi'}^G\times\mathcal{K}_{Q,\pi}^G$ définie par

$$B(e',e)=(e',R_{P'\cap L|P\cap L}^L(\tau)^{-1}R_{P'\cap L|P\cap L}^L(\tau_\lambda)\circ e).$$

On a alors $c_{P'}(\lambda)=trace_B(\pi(f))$. Les conditions du lemme précédent sont vérifiées, si l'on remplace dans ce lemme P et τ par Q et π. Le lemme entraîne $c_{P'}(\lambda)=0$ comme on le voulait.

Soient $\tilde{M}$ et $Q=LU$ comme en (i). On peut appliquer à la (G,M)-famille $(\mathcal{R}_{P^L}^G(\tau))_{P^L\in\mathcal{P}^L(M)}$ les formules de descente d'Arthur, en particulier le corollaire 7.2 de [A2]. On en déduit l'égalité

$$J_{\tilde{M}}^Q(\tau,f)=\sum_{L'\in\mathcal{L}^L(M)}d_M^L(\tilde{M},L')J_M^{Q'}(\tau,f).$$

Le sous-groupe parabolique Q' appartient à $\mathcal{P}(L')$ et est contenu dans Q. Si $Q\neq G$, tous ces Q' sont aussi différents de G. Il en est de même si $\tilde{M}\neq M$ car dans ce cas, la condition $d_M^L(\tilde{M},L')\neq 0$ implique que $L'\subsetneq L$. Alors le résultat précédent entraîne $J_{\tilde{M}}^Q(\tau,f)=0$, ce qui prouve (i).

Supposons τ proprement induite, fixons $P'=M'U'\in\mathcal{F}^M(M_{min})$ et une représentation irréductible τ' de $M'(F)$ tels que $P'\neq M$ et $\tau=Ind_{P'}^M(\tau')$. La représentation τ' est tempérée. Il résulte des définitions que l'on a l'égalité

$$J_M^G(\tau,f)=J_M^G(\tau',f).$$

On applique le (i) en remplaçant M et $\tilde{M}$ par M' et M. On obtient la nullité du terme de droite ci-dessus, d'où le (ii) de l'énoncé. $\square$

Le terme $J_M^G(\tau,f)$ dépend a priori des facteurs $r_{P'|P}(\tau,\lambda)$ utilisés pour définir les opérateurs d'entrelacement normalisés. En fait

(1) pour f très cuspidale, $J_M^G(\tau,f)$ ne dépend pas des facteurs de normalisation.

En effet, considérons deux familles de facteurs, que l'on indexe par les nombres 1 et 2. On en déduit deux (G,M)-familles $(c_{P',1})_{P'\in\mathcal{P}(M)}$ et $(c_{P',2})_{P'\in\mathcal{P}(M)}$ comme dans la preuve ci-dessus et il suffit de prouver que $c_{M,1}=c_{M,2}$. Or il existe une (G,M)-famille $(d_{P'})_{P'\in\mathcal{P}(M)}$, construite à l'aide des rapports $r_{P'|P,1}(\tau,\lambda)r_{P'|P,2}(\tau,\lambda)^{-1}$, telle que $c_{P',1}=c_{P',2}d_{P'}$ pour tout P'. On a alors la formule de descente

$$c_{M,1}=\sum_{L',L''\in\mathcal{L}(M)}d_M^G(L',L'')c_{M,2}^{Q'}d_M^{Q''},$$

cf. [A2] corollaire 7.4. Le terme Q' est un élément de $\mathcal{P}(M')$ et $c_{M,2}^{Q'}=J_M^{Q'}(\tau,f)$, ce terme étant calculé à l'aide de la seconde famille de facteurs. Si $L'\neq G$, il est nul d'après le lemme ci-dessus. Dans la somme ci-dessus, il ne reste que la contribution du couple $(L',L'')=(G,M)$. Pour ce couple, $c_{M,2}^{Q'}d_M^{Q''}=c_{M,2}$, d'où l'égalité cherchée.

2.3 Induction de quasi-caractères

Pour ce paragraphe, oublions les choix de mesures de Haar et de sous-groupe compact spécial que l'on a effectués. Soit M un Lévi de G. On munit $G(F)$ et $M(F)$ de mesures de Haar. Soit D^M une distribution sur $M(F)$ invariante par conjugaison. On sait définir la distribution induite $D = Ind_M^G(D^M)$, qui est une distribution invariante sur $G(F)$. Rappelons sa définition. Fixons un élément $P = MU \in \mathcal{P}(M)$ et un sous-groupe compact spécial K de $G(F)$, en bonne position relativement à M. Munissons K et $U(F)$ de mesures de Haar, compatibles au sens habituel avec les mesures sur $M(F)$ et $G(F)$. Pour $f \in C_c^\infty(G(F))$, on définit $f_P \in C_c^\infty(M(F))$ par

$$f_P(m) = \delta_P(m)^{1/2} \int_K \int_{U(F)} f(k^{-1}muk)du\, dk.$$

On pose $D(f) = D^M(f_P)$. Cela ne dépend pas des choix de P et K. Soit maintenant θ^M une fonction définie presque partout sur $M(F)$, localement intégrable et invariante par conjugaison. Soit D^M la distribution associée, c'est-à-dire que

$$D^M(\varphi) = \int_{M(F)} \varphi(m)\theta^M(m)dm.$$

A l'aide de la formule d'intégration de Weyl, on vérifie que D est elle-aussi associée à une fonction θ sur $G(F)$, localement intégrable et invariante par conjugaison. Pour tout $x \in G(F)$, fixons un ensemble $\mathcal{X}^M(x)$ de représentants des classes de conjugaison par $M(F)$ dans l'ensemble des éléments de $M(F)$ qui sont conjugués à x par un élément de $G(F)$. Pour $x \in G_{reg}(F)$, on a l'égalité

$$(1) \qquad \theta(x) = \sum_{x' \in \mathcal{X}^M(x)} D^G(x)^{-1/2} D^M(x')^{1/2} \theta^M(x').$$

Cette formule montre que θ est indépendante des choix de mesures sur $G(F)$ et $M(F)$. On note $Ind_M^G(\theta^M) = \theta$.

Rappelons que l'on a défini en [W1] 4.1 la notion de quasi-caractère sur $G(F)$. Soit θ une fonction définie presque partout sur $G(F)$ et invariante par conjugaison. On dit que c'est un quasi-caractère si et seulement si, pour tout élément semi-simple x de $G(F)$, il existe un bon voisinage ω de 0 dans $\mathfrak{g}_x(F)$ et, pour tout $\mathcal{O} \in Nil(\mathfrak{g}_x)$, il existe $c_{\theta,\mathcal{O}}(x) \in \mathbb{C}$ de sorte que l'on ait l'égalité

$$(2) \qquad \theta(xexp(X)) = \sum_{\mathcal{O} \in Nil(\mathfrak{g}_x)} c_{\theta,\mathcal{O}}(x)\hat{j}(\mathcal{O}, X)$$

presque partout pour $x \in \omega$. Donnons quelques explications. On note G_x la composante neutre du centralisateur $Z_G(x)$ de x dans G et, comme toujours $\mathfrak{g}_x$ son algèbre de Lie. On renvoie à [W1] 3.1 pour la notion de bon voisinage. On note $Nil(\mathfrak{g}_x)$ l'ensemble des orbites nilpotentes dans $\mathfrak{g}_x$. La fonction $X \mapsto \hat{j}(\mathcal{O}, X)$ est la fonction associée à la distribution transformée de Fourier de l'intégrale orbitale $J_{\mathcal{O}}$ associée à $\mathcal{O}$, normalisée comme en [W1] 1.2.

D'autre part, soit $\mathcal{O}^M \in Nil(\mathfrak{m})$. On sait définir "l'orbite induite" de $\mathcal{O}^M$. Plus exactement, c'est la réunion d'un certain nombre d'éléments de $Nil(\mathfrak{g})$. Fixons $P = MU \in \mathcal{P}(M)$. Une orbite $\mathcal{O} \in Nil(\mathfrak{g})$ est incluse dans cette orbite induite si et seulement si l'intersection $\mathcal{O} \cap (\mathcal{O}^M + \mathfrak{u}(F))$ contient un ouvert non vide de $\mathcal{O}^M + \mathfrak{u}(F)$. On pose $[\mathcal{O} : \mathcal{O}^M] = 1$ si $\mathcal{O}$ est incluse dans l'orbite induite de $\mathcal{O}^M$, $[\mathcal{O} : \mathcal{O}^M] = 0$ sinon. Remarquons que si $[\mathcal{O} : \mathcal{O}^M] = 1$ et si l'une des deux orbites est régulière, l'autre l'est aussi.

Pour un élément semi-simple $x \in G(F)$, on a fixé ci-dessus un ensemble $\mathcal{X}^M(x)$. Pour tout élément x' de cet ensemble, on note $\Gamma_{x'}$ l'ensemble des $g \in G(F)$ tels que $gxg^{-1} = x'$. C'est un espace principal homogène pour l'action à droite de $Z_G(x)(F)$. Pour tout $g \in \Gamma_{x'}$, la conjugaison par g envoie $Nil(\mathfrak{g}_x)$ sur $Nil(\mathfrak{g}_{x'})$. On note $\mathcal{O} \mapsto g\mathcal{O}$ cette application.

Lemme. *Soit θ^M un quasi-caractère de $M(F)$ et $\theta = Ind_M^G(\theta^M)$. Alors*

(i) θ est un quasi-caractère de $G(F)$;

(ii) soient x un élément semi-simple de $G(F)$ et $\mathcal{O} \in Nil(\mathfrak{g}_x)$ une orbite régulière ; on a l'égalité

$$c_{\theta,\mathcal{O}}(x) = \sum_{x' \in \mathcal{X}^M(x)} \sum_{g \in \Gamma_{x'}/G_x(F)} \sum_{\mathcal{O}' \in Nil(\mathfrak{m}_{x'})} D^G(x)^{-1/2} D^M(x')^{1/2}$$
$$[Z_M(x')(F) : M_{x'}(F)]^{-1} [g\mathcal{O} : \mathcal{O}'] c_{\theta^M,\mathcal{O}'}(x').$$

Preuve. Soit x un élément semi-simple de $G(F)$. Considérons un bon voisinage ω de 0 dans $\mathfrak{g}_x$. Pour $x' \in \mathcal{X}^M(x)$, posons $\omega_{x'} = g\omega g^{-1}$, où g est un élément quelconque de $\Gamma_{x'}$. C'est un bon voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}_{x'}$. En prenant ω assez petit, on peut supposer que $\omega_{x'}^M = \omega_{x'} \cap \mathfrak{m}_{x'}(F)$ est un bon voisinage de 0 dans $\mathfrak{m}_{x'}(F)$ et que le quasi-caractère θ^M admet un développement de la forme (2) dans $x'exp(\omega_{x'}^M)$. On définit $\theta^M_{x',\omega_{x'}^M}$: c'est la fonction sur $\mathfrak{m}_{x'}(F)$, à support dans $\omega_{x'}^M$ et telle que $\theta^M_{x',\omega_{x'}^M}(Y) = \theta^M(x'exp(Y))$ pour tout $Y \in \omega_{x'}^M$. C'est un quasi-caractère sur $\mathfrak{m}_{x'}(F)$. En adaptant les définitions ci-dessus aux algèbres de Lie, on définit la fonction localement intégrable $\phi_{x',\omega_{x'}} = Ind_{M_{x'}}^{G_{x'}}(\theta^M_{x',\omega_{x'}^M})$ sur $\mathfrak{g}_{x'}(F)$. On va prouver

(3) pour tout $X \in \omega \cap \mathfrak{g}_{x,reg}(F)$, on a l'égalité

$$\theta(xexp(X)) = \sum_{x' \in \mathcal{X}^M(x)} \sum_{g \in \Gamma_{x'}/G_x(F)} D^G(x)^{-1/2} D^M(x')^{1/2}$$
$$[Z_M(x')(F) : M_{x'}(F)]^{-1} \phi_{x',\omega_{x'}}(gXg^{-1}).$$

Fixons X. Pour tout $x' \in \mathcal{X}^M(x)$ et tout $g \in \Gamma_{x'}$, fixons un ensemble $\mathcal{X}^{M_{x'}}(gXg^{-1})$ de représentants des classes de conjugaison par $M_{x'}(F)$ dans l'ensemble des éléments de $M_{x'}(F)$ qui sont conjugués à gXg^{-1} par un élément de $G_{x'}(F)$. Il est inclus dans $\omega_{x'}^M$ et on peut supposer qu'il ne dépend que de l'image de g dans $\Gamma_{x'}/G_x(F)$. En appliquant la formule (1) aux fonctions $\phi_{x',\omega_{x'}}$, le membre de droite de la formule (3) est égal à

$$\sum_{x' \in \mathcal{X}^M(x)} \sum_{g \in \Gamma_{x'}/G_x(F)} D^G(x)^{-1/2} D^M(x')^{1/2} [Z_M(x')(F) : M_{x'}(F)]^{-1}$$
$$\sum_{Y \in \mathcal{X}^{M_{x'}}(gXg^{-1})} D^{G_{x'}}(Y)^{-1/2} D^{M_{x'}}(Y)^{1/2} \theta^M(x'exp(Y)).$$

Soient x', g et Y apparaissant dans cette somme. On a

$$D^G(x) D^{G_{x'}}(Y) = D^G(x') D^{G_{x'}}(Y) = D^G(x'exp(Y)),$$

$$D^M(x')D^{M_{x'}}(Y) = D^M(x'exp(Y)).$$

D'autre part, $x'exp(Y)$ est un élément de $M(F)$ conjugué à $xexp(X)$ par un élément de $G(F)$. Il est donc conjugué par un élément de $M(F)$ à un unique élément de $\mathcal{X}^M(xexp(X))$. Notons cet élément $y(x', g, Y)$. On a

$$D^G(x'exp(Y))^{-1/2}D^M(x'exp(Y))^{1/2}\theta^M(x'exp(Y)) =$$

$$D^G(xexp(X))^{-1/2}D^M(y(x', g, Y))^{1/2}\theta^M(y(x', g, Y)).$$

La formule ci-dessus s'écrit donc

$$\sum_{y \in \mathcal{X}^M(xexp(X))} c(y)D^G(xexp(X))^{-1/2}D^M(y)^{1/2}\theta^M(y),$$

où

$$c(y) = \sum_{x',g,Y; y(x',g,Y)=y} [Z_M(x')(F) : M_{x'}(F)]^{-1}.$$

En comparant avec la formule (1), on voit que, pour démontrer (3), il suffit de prouver que

(4) $c(y) = 1$ pour tout $y \in \mathcal{X}^M(xexp(X))$.

Soit $y \in \mathcal{X}^M(xexp(X))$. Fixons $\gamma \in G(F)$ tel que $\gamma xexp(X)\gamma^{-1} = y$. Puisque $y \in M(F) \cap G_{reg}(F)$, le centralisateur G_y de y est contenu dans M. Mais $\gamma x\gamma^{-1}$ appartient à $G_y(F)$. Il appartient donc à $M(F)$. Il existe donc $x' \in \mathcal{X}^M(x)$ et $m \in M(F)$ tel que $\gamma x\gamma^{-1} = mx'm^{-1}$. Posons $g = m^{-1}\gamma$. Alors $g \in \Gamma_{x'}$ et $\gamma = mg$. On a $y = mx'exp(gXg^{-1})m^{-1}$. Puisque $y \in M(F)$, on a aussi $x'exp(gXg^{-1}) \in M(F)$, donc $gXg^{-1} \in \mathfrak{m}_{x'}(F)$. Alors gXg^{-1} est conjugué par un élément de $M_{x'}(F)$ à un élément $Y \in \mathcal{X}^{M_{x'}}(gXg^{-1})$ et y est conjugué par un élément de $M(F)$ à $x'exp(Y)$. Pour ces choix de x', g, Y, on a $y = y(x', g, Y)$. Soit (x'_1, g_1, Y_1) un autre triplet, supposons $y = y(x'_1, g_1, Y_1)$. Quitte à multiplier g à gauche par un élément de $G_{x'}(F)$ (ce qui revient à le multiplier à droite par un élément de $G_x(F)$), on peut supposer $Y = gXg^{-1}$. De même, on peut supposer $Y_1 = g_1Xg_1^{-1}$. Soit $\mu \in M(F)$ tel que $\mu x'exp(Y)\mu^{-1} = x'_1exp(Y_1)$. Alors $\mu gxexp(X)g^{-1}\mu^{-1} = g_1xexp(X)g_1^{-1}$. En posant $h = g_1^{-1}\mu g$, on a $hxexp(X)h^{-1} = xexp(X)$. Puisque $xexp(X)$ est régulier, cela entraîne $h \in G_{xexp(X)}(F)$. Cet ensemble est contenu dans $G_x(F)$ d'après les propriétés des bons voisinages. Donc $h \in G_x(F)$. On a alors

$$\mu x'\mu^{-1} = \mu gxg^{-1}\mu^{-1} = g_1hxh^{-1}g_1^{-1} = x'_1.$$

Par définition de l'ensemble $\mathcal{X}^M(x)$, cela entraîne $x'_1 = x'$. A fortiori, la constante $[Z_M(x'_1)(F) : M_{x'_1}(F)]^{-1}$ qui intervient dans la définition de $c(y)$ est égale à $[Z_M(x')(F) : M_{x'}(F)]^{-1}$ et ne dépend pas du triplet. Puisque $x'_1 = x'$, la relation ci-dessus entraîne $\mu \in Z_M(x')(F)$. En revenant à la définition de μ, on a $\mu Y\mu^{-1} = Y_1$. Le couple $(g_1G_x(F), Y_1)$ appartient donc à l'orbite de $(gG_x(F), Y)$ pour l'action de $Z_M(x')(F)$ ainsi définie : l'action de $\mu \in Z_M(x')(F)$ envoie $(gG_x(F), Y)$ sur le couple $(g_1G_x(F), Y_1)$ tel que $g_1G_x(F) = \mu gG_x(F)$ et que Y_1 soit l'unique élément de $\mathcal{X}^{M_{x'}}(g_1Xg_1^{-1})$ conjugué à $\mu Y\mu^{-1}$ par un élément de $M_{x'}(F)$. Inversement, on vérifie que tout couple ainsi obtenu convient. L'action de $Z_M(x')(F)$ que l'on vient de définir se quotiente en une action de $Z_M(x')(F)/M_{x'}(F)$. Remarquons que $Z_M(x') \cap G_{x'} = M_{x'}$ car ces deux ensembles sont égaux au commutant de A_M dans $G_{x'}$. Il en résulte que l'action de $Z_M(x')(F)/M_{x'}(F)$ est libre : son action sur la première composante l'est. Le nombre de triplet est donc égal au nombre d'éléments de ce groupe, ce qui entraîne (4) et achève la preuve de (3).

La formule (3) nous ramène au problème suivant. Soit maintenant θ^M un quasi-caractère sur $\mathfrak{m}(F)$, dont on écrit le développement à l'origine

$$\theta^M(Y) = \sum_{\mathcal{O}^M \in Nil(\mathfrak{m})} c_{\theta^M, \mathcal{O}^M} \hat{j}^M(\mathcal{O}^M, Y).$$

Soit $\theta = Ind_M^G(\theta^M)$. On doit prouver que θ possède un développement à l'origine de la forme

$$(5) \qquad \theta(X) = \sum_{\mathcal{O} \in Nil(\mathfrak{g})} c_{\theta,\mathcal{O}} \hat{j}^G(\mathcal{O}, X),$$

et prouver que, pour $\mathcal{O}$ régulière, on a l'égalité

$$(6) \qquad c_{\theta,\mathcal{O}} = \sum_{\mathcal{O}^M \in Nil(\mathfrak{m})} [\mathcal{O} : \mathcal{O}^M].$$

Comme on l'a expliqué, l'induction ne dépend pas des mesures de Haar, si on la considère comme une application portant sur des fonctions localement intégrables. On peut donc supposer que les mesures sont normalisées comme en [W1] 1.2. L'analogue pour les algèbres de Lie de l'application $f \mapsto f_P$ "commute" à la transformation de Fourier. On en déduit que l'induite d'une fonction $Y \mapsto \hat{j}^M(\mathcal{O}^M, Y)$ est la fonction associée à la transformée de Fourier de la distribution induite de l'intégrale orbitale $J^M_{\mathcal{O}^M}$. Il est bien connu que cette distribution induite est combinaison linéaire des intégrales orbitales $J^G_{\mathcal{O}}$ pour des éléments $\mathcal{O} \in Nil(\mathfrak{g})$ inclus dans l'orbite induite de $\mathcal{O}^M$. En tout cas, l'induite d'une fonction $Y \mapsto \hat{j}^M(\mathcal{O}^M, Y)$ est combinaison linéaire de fonctions $X \mapsto j^G(\mathcal{O}, X)$, ce qui prouve l'existence du développement (5). Pour prouver (6), on voit qu'il suffit de prouver que, pour $\mathcal{O}^M$ régulière, la distribution induite de $J^M_{\mathcal{O}^M}$ est égale à

$$\sum_{\mathcal{O} \in Nil(\mathfrak{g})} [\mathcal{O} : \mathcal{O}^M] J^G_{\mathcal{O}}.$$

On peut supposer M et G quasi-déployés, sinon il n'y a pas d'orbites nilpotentes régulières et la question est vide. Toute orbite nilpotente régulière $\mathcal{O}$ de $\mathfrak{g}(F)$ apparaît dans l'orbite induite d'une unique orbite nilpotente régulière $\mathcal{O}^M$ de $\mathfrak{m}(F)$. En effet, fixons $P \in \mathcal{P}(M)$ et un sous-groupe de Borel B de G tel que $B \subset P$. Soient $Y, Y' \in \mathfrak{m}(F)$, $N, N' \in \mathfrak{u}(F)$, supposons que $Y + N$ et $Y' + N'$ appartiennent à $\mathcal{O}$. Quitte à effectuer des conjugaisons par des éléments de $M(F)$, on peut supposer $Y, Y' \in \mathfrak{b}(F) \cap \mathfrak{m}(F)$. Soit $g \in G(F)$ tel que $g(Y + N)g^{-1} = Y' + N'$. L'élément $Y' + N'$ appartient aux deux sous-algèbres de Borel $\mathfrak{b}$ et $g\mathfrak{b}g^{-1}$. Mais $Y' + N'$ est régulier donc n'appartient qu'à une seule telle sous-algèbre. Donc $g\mathfrak{b}g^{-1} = \mathfrak{b}$ et g appartient à $B(F)$. En écrivant $g = mu$, avec $m \in M(F)$ et $u \in U(F)$, on a alors $Y' = mYm^{-1}$, c'est-à-dire que Y et Y' sont dans la même orbite. Cette unicité nous permet de transformer notre problème en le suivant : prouver que la distribution induite de

$$\sum_{\mathcal{O}^M \text{ régulière}} J^M_{\mathcal{O}^M}$$

est égale à

$$\sum_{\mathcal{O} \text{ régulière}} J^G_{\mathcal{O}}.$$

Introduisons un sous-groupe de Borel B comme ci-dessus et un sous-tore maximal $T \subset B \cap M$. Fixons un élément $X \in \mathfrak{t}(F) \cap \mathfrak{g}_{reg}(F)$. En utilisant un résultat de Shelstad, on a prouvé en [W1] lemme 11.4 que la première distribution ci-dessus était la limite simple des distributions $f \mapsto J_M^M(zX,f)$ sur $M(F)$ quand $z \in F^\times$ tend vers 0 (dans [W1], notre groupe était un groupe spécial orthogonal, mais la démonstration de cette propriété n'utilisait pas cette particularité). De même, la seconde distribution est la limite simple des distributions $f \mapsto J_G(zX,f)$ sur $G(F)$. Mais il résulte des définitions que la distribution $f \mapsto J_G(zX,f)$ est l'induite de la distribution $f \mapsto J_M^M(zX,f)$. La conclusion s'ensuit. $\square$

2.4 Intégrales orbitales pondérées invariantes

Soient $f, f' \in C_c^\infty(G(F))$. Nous dirons que f et f' sont équivalentes si et seulement si $D(f) = D(f')$ pour toute distribution D sur $G(F)$ invariante par conjugaison. Comme on le sait, cette condition est équivalente à l'une ou l'autre des deux conditions suivantes

(1) $J_G(x,f) = J_G(x,f')$ pour tout $x \in G(F)$;

(2) $\theta_\pi(f) = \theta_\pi(f')$ pour toute représentation $\pi \in Temp(G)$.

Soient $M \in \mathcal{L}(M_{min})$, $x \in M(F) \cap G_{reg}(F)$ et $f \in C_c^\infty(G(F))$. Arthur a défini l'intégrale orbitale pondérée $J_M(x,f)$. On a rappelé la définition en [W1] 2.3. Il a aussi défini l'intégrale pondérée invariante $I_M(x,f)$. Rappelons la définition. Pour $Z \in \mathcal{A}_{G,F}$, notons $\mathbf{1}_{H_G=Z}$ la fonction caractéristique de l'ensemble des $x \in G(F)$ tels que $H_G(x) = Z$. Notons $\mathcal{H}_{ac}(G(F))$ l'ensemble des fonctions $f : G(F) \to \mathbb{C}$ qui vérifient les deux conditions suivantes

(3) f est biinvariante par un sous-groupe ouvert compact de $G(F)$;

(4) pour tout $Z \in \mathcal{A}_{G,F}$, la fonction $f\mathbf{1}_{H_G=Z}$ appartient à $C_c^\infty(G(F))$.

Remarquons que plusieurs définitions posées pour les fonctions appartenant à $C_c^\infty(G(F))$ se généralisent aux éléments de $\mathcal{H}_{ac}(G(F))$. Par exemple les intégrales orbitales pondérées (on pose $J_M(x,f) = J_M(x, f\mathbf{1}_{H_G=H_G(x)})$) ou la notion d'équivalence introduite ci-dessus.

Soient $L \in \mathcal{L}(M_{min})$ et $f \in C_c^\infty(G(F))$. Arthur montre qu'il existe une fonction $\phi_L(f) \in \mathcal{H}_{ac}(L(F))$ telle que, pour toute représentation $\pi \in Temp(L)$ et tout $Z \in \mathcal{A}_{L,F}$, on ait l'égalité

$$(5) \qquad \int_{i\mathcal{A}_{L,F}^*} J_L(\pi_\lambda, f) exp(-\lambda(Z)) d\lambda = \theta_\pi(\phi_L(f)\mathbf{1}_{H_L=Z}).$$

La fonction $\phi_L(f)$ est bien définie à équivalence près. On définit $I_M(x,f)$ par récurrence sur $a_M - a_G$ par la formule

$$J_M(x,f) = \sum_{L \in \mathcal{L}(M)} I_M^L(x, \phi_L(f)\mathbf{1}_{H_L=H_L(x)}).$$

Bien sûr, $I_M(x,f)$ ne dépend que de la classe de conjugaison par $M(F)$ de x. La distribution $f \mapsto I_M(x,f)$ est invariante par conjugaison par $G(F)$ et ne dépend pas du choix du groupe K. La propriété suivante en résulte, par simple transport de structure. Soit $g \in G(F)$ tel que $gMg^{-1} \in \mathcal{L}(M_{min})$. Alors on a l'égalité $I_{gMg^{-1}}(gxg^{-1}, f) = I_M(x,f)$.

Pour $f \in C_c^\infty(G(F))$, on définit une fonction $I\theta_f$ sur $G_{reg}(F)$ de la façon suivante. Soit $x \in G_{reg}(F)$. Notons $M(x)$ le commutant de A_{G_x} dans G. C'est un Lévi de G et c'est le plus petit Lévi contenant x. Choisissons $g \in G(F)$ tel que $gM(x)g^{-1} \in \mathcal{L}(M_{min})$. On pose

$$I\theta_f(x) = (-1)^{a_{M(x)} - a_G} D^G(x)^{-1/2} I_{gM(x)g^{-1}}(gxg^{-1}, f).$$

Cela ne dépend pas du choix de g. La fonction $I\theta_f$ est invariante par conjugaison et localement constante sur $G_{reg}(F)$. Remarquons que $I\theta_f = I\theta_{f'}$ si f et f' sont équivalentes, puisque les distributions $f \mapsto I_M(x,f)$ sont invariantes par conjugaison.

2.5 Fonctions cuspidales et quasi-caractères invariants

Soit $f \in C_c^\infty(G(F))$. On dit que f est cuspidale si et seulement si, pour tout groupe de Lévi $M \subsetneq G$ et pour tout $x \in G_{reg}(F) \cap M(F)$, on a $J_G(x,f) = 0$. Cette condition est équivalente à ce que $\theta_\pi(f) = 0$ pour toute représentation π de $G(F)$ qui est tempérée et proprement induite. Une fonction très cuspidale est cuspidale.

Lemme. *Soit $f \in C_c^\infty(G(F))$, supposons f cuspidale. Alors $I\theta_f$ est un quasi-caractère de $G(F)$.*

Preuve. Arthur définit un ensemble de représentations virtuelles $T_{ell}(G)$. Tout élément π de $T_{ell}(G)$ est une combinaison linéaire à coefficients complexes de représentations elliptiques. Par linéarité, on définit la contragrédiente $\check{\pi}$, le caractère θ_π et, pour $\lambda \in i\mathcal{A}_G^*$, la représentation virtuelle π_λ qui appartient aussi à $T_{ell}(G)$. On note $\{T_{ell}(G)\}$ l'ensemble des orbites dans $T_{ell}(G)$ pour l'action $\lambda \mapsto \pi_\lambda$. Si K' est un sous-groupe ouvert compact de $G(F)$, il n'y a qu'un nombre fini d'orbites $\mathcal{O} \in T_{ell}(G)$ pour lesquelles il existe $\pi \in \mathcal{O}$ et une fonction $f' \in C_c^\infty(G(F))$, biinvariante par K', de sorte que $\theta_\pi(f') \neq 0$. Pour toute orbite $\mathcal{O}$, on fixe $\pi \in \mathcal{O}$ et on définit un certain coefficient $c(\mathcal{O}) > 0$. Cela étant, en [A5] théorème 5.1, Arthur démontre que, pour toute fonction cuspidale $f \in C_c^\infty(G(F))$, pour tout $M \in \mathcal{L}(M_{min})$ et pour tout élément $y \in M(F) \cap G_{reg}(F)$ qui est elliptique dans $M(F)$, on a l'égalité

$$D^G(y)^{-1/2}(-1)^{a_M - a_G} I_M(y,f) = \sum_{\mathcal{O} \in \{T_{ell}(G)\}} c(\mathcal{O}) \int_{i\mathcal{A}_{G,F}^*} \theta_{\pi_\lambda}(y)\theta_{(\pi_\lambda)\check{}}(f)d\lambda.$$

Elle équivaut à

$$D^G(y)^{-1/2}(-1)^{a_M - a_G} I_M(y,f) = \sum_{\mathcal{O} \in \{T_{ell}(G)\}} c(\mathcal{O})\theta_\pi(y)\theta_{\check{\pi}}(f\mathbf{1}_{H_G = H_G(y)}).$$

Soit x un élément semi-simple de $G(F)$. Pour y dans un certain voisinage de x, on a $H_G(y) = H_G(x)$. Nos définitions et la formule ci-dessus entraînent que, pour $y \in G_{reg}(F)$ dans ce voisinage, on a l'égalité

$$(1) \qquad I\theta_f(y) = \sum_{\mathcal{O} \in \{T_{ell}(G)\}} c(\mathcal{O})\theta_\pi(y)\theta_{\check{\pi}}(f\mathbf{1}_{H_G = H_G(x)}).$$

Comme on l'a dit, la somme est en fait finie. Donc $I\theta_f$ coïncide dans ce voisinage de x avec une combinaison linéaire finie de caractères de représentations admissibles irréductibles. D'après Harish-Chandra ([HCDeBS] théorème 16.2), tout tel caractère est un quasi-caractère. La notion de quasi-caractère étant de nature locale, la conclusion s'ensuit. $\square$

On appelle $I\theta_f$ le quasi-caractère invariant associé à f.

La notion de cuspidalité se généralise aux éléments de $\mathcal{H}_{ac}(G(F))$: $f \in \mathcal{H}_{ac}(G(F))$ est cuspidale si et seulement si $f\mathbf{1}_{H_G = Z}$ l'est pour tout $Z \in \mathcal{A}_{G,F}$. La définition de $I\theta_f$ aussi : $I\theta_f = \sum_{Z \in \mathcal{A}_{G,F}} I\theta_{f\mathbf{1}_{H_G = Z}}$, cette somme étant localement finie.

2.6 Quasi-caractère et quasi-caractère invariant

Soit $f \in C_c^\infty(G(F))$ une fonction très cuspidale. On vient de lui associer un quasi-caractère $I\theta_f$ sur $G(F)$. Dans [W1] 5.6 et 5.9, on lui a aussi associé un quasi-caractère θ_f. En fait, cette définition dépend des choix de mesures. Nous modifions la définition de [W1] 5.6 en utilisant nos présentes mesures plutôt que celles de cette référence. Il convient de comparer θ_f et $I\theta_f$.

Lemme. *Soit $f \in C_c^\infty(G(F))$ une fonction très cuspidale. Alors*
(i) pour tout $L \in \mathcal{L}(M_{min})$, la fonction $\phi_L(f)$ est cuspidale ;
(ii) on a l'égalité

$$\theta_f = \sum_{L\in\mathcal{L}(M_{min})} |W^L||W^G|^{-1}(-1)^{a_L-a_G} Ind_L^G(I\theta^L_{\phi_L(f)}).$$

Preuve. Pour prouver (i), on doit montrer que, pour tout $Z \in \mathcal{A}_{L,F}$ et toute représentation tempérée proprement induite π de $L(F)$, on a $\theta_\pi(\phi_L(f)\mathbf{1}_{H_L=Z}) = 0$. Cela résulte de l'égalité 2.4(5) et du lemme 2.2(ii) qui affirme que $J_L^G(\pi_\lambda, f) = 0$ pour tout $\lambda \in i\mathcal{A}_L^*$.

Soit $\varphi \in C_c^\infty(G(F))$. On peut écrire la formule d'intégration de Weyl sous la forme

$$(1) \qquad \int_{G(F)} \theta_f(g)\varphi(g)dg = \sum_{M\in\mathcal{L}(M_{min})} |W^M||W^G|^{-1}$$

$$\sum_{T\in\mathcal{T}_{ell}(M)} |W(M,T)|^{-1}\int_{T(F)} \theta_f(t)J_G(t,\varphi)D^G(t)^{1/2}dt,$$

avec les notations d'Arthur que l'on a rappelées en [W1] 2.4. Pour tout $L \in \mathcal{L}(M_{min})$, fixons $Q_L \in \mathcal{P}(L)$. On a de même

$$\int_{G(F)} Ind_L^G(I\theta^L_{\phi_L(f)})(g)\varphi(g)dg = \int_{L(F)} I\theta^L_{\phi_L(f)}(l)\varphi_{Q_L}(l)dl$$

$$= \sum_{M\in\mathcal{L}^L(M_{min})} |W^M||W^L|^{-1} \sum_{T\in\mathcal{T}_{ell}(M)} |W(M,T)|^{-1}\int_{T(F)} I\theta^L_{\phi_L(f)}(t)J_L(t,\varphi_{Q_L})D^L(t)^{1/2}dt.$$

Le terme $J_L(t,\varphi_{Q_L})$ intervenant ci-dessus est égal à $J_G(t,\varphi)$. Notons θ'_f la fonction figurant dans le membre de droite du (ii) de l'énoncé. En sommant les égalités ci-dessus, on obtient

$$(2) \qquad \int_{G(F)} \theta'_f(g)\varphi(g)dg$$

$$= \sum_{M\in\mathcal{L}(M_{min})} |W^M||W^G|^{-1} \sum_{T\in\mathcal{T}_{ell}(M)} |W(M,T)|^{-1}\int_{T(F)} \gamma_{M,T}(t)J_G(t,\varphi)dt,$$

où on a posé

$$\gamma_{M,T}(t) = \sum_{L\in\mathcal{L}(M)} (-1)^{a_L-a_G} I\theta^L_{\phi_L(f)}(t)D^L(t)^{1/2}.$$

Soient $M \in \mathcal{L}(M_{min})$, $T \in \mathcal{T}_{ell}(M)$ et $t \in T(F) \cap G_{reg}(F)$. Pour $L \in \mathcal{L}(M)$, appliquons la définition de $I\theta^L_{\phi_L(f)}(t)$ donnée en 2.4. Puisque T est elliptique dans M, le Lévi $M(t)$ est égal à M (que le groupe ambiant soit G ou L). Donc

$$I\theta^L_{\phi_L(f)}(t) = (-1)^{a_M-a_L}D^L(t)^{-1/2}I_M^L(t,\phi_L(f)).$$

On peut aussi bien remplacer $\phi_L(f)$ par $\phi_L(f)\mathbf{1}_{H_L=H_L(t)}$. Alors

$$\gamma_{M,T}(t) = (-1)^{a_M-a_G} \sum_{L\in\mathcal{L}(M)} I_M^L(t, \phi_L(f)\mathbf{1}_{H_L=H_L(t)})$$

$$= (-1)^{a_M-a_G} J_M^G(t, f).$$

En se reportant à la définition de [W1] 5.3, on obtient $\gamma_{M,T}(t) = D^G(t)^{1/2}\theta_f(t)$. On conclut en comparant les égalités (1) et (2). $\square$

2.7 Fonctions cuspidales et fonctions très cuspidales

Lemme. *Soit $f \in C_c^\infty(G(F))$ une fonction cuspidale. Alors il existe une fonction très cuspidale $f' \in C_c^\infty(G(F))$ qui est équivalente à f.*

Preuve. Par un procédé de partition de l'unité tel que celui de la preuve de [W1] proposition 6.4, il suffit de prouver l'assertion suivante

(1) soit $x \in G(F)$ un élément semi-simple ; alors il existe un G-domaine Ω dans $G(F)$ et une fonction très cuspidale $f' \in C_c^\infty(G(F))$ tels que $x \in \Omega$ et $J_G(y, f') = J_G(y, f)$ pour tout $y \in \Omega \cap G_{reg}(F)$.

Supposons $A_{G_x} \neq A_G$. Il existe un G-domaine Ω contenant x tel que, pour $y \in \Omega \cap G_{reg}(F)$, on ait $A_{G_y} \neq A_G$, autrement dit y n'est pas elliptique dans $G(F)$. Alors $J_G(y, f) = 0$ et il suffit de prendre $f' = 0$ pour vérifier l'assertion. Supposons maintenant $A_{G_x} = A_G$. Fixons un bon voisinage ω de 0 dans $\mathfrak{g}_x(F)$. Le quasi-caractère $I\theta_f$ se descend en un quasi-caractère $I\theta_{f,x,\omega}$ sur $\mathfrak{g}_x(F)$, cf. [W1] 4.3, qui est évidemment à support compact modulo conjugaison et invariant par l'action de $Z_G(x)(F)$. En combinant la proposition 6.4 et le lemme 6.2 de [W1], on voit qu'il existe une fonction très cuspidale $f' \in C_c^\infty(G(F))$ telle que $\theta_{f',x,\omega} = I\theta_{f,x,\omega}$. Posons $\Omega = \{g^{-1}xexp(X)g; X \in \omega, g \in G(F)\}$ et soit $y \in \Omega\cap G_{reg}(F)$. Si y n'est pas elliptique dans $G(F)$, on a $J_G(y, f') = 0 = J_G(y, f)$. Supposons y elliptique, écrivons $y = g^{-1}xexp(X)g$ avec $g \in G(F)$ et $X \in \omega$. D'après les définitions, on a $J_G(y, f') = \theta_{f',x,\omega}(X)$ et $J_G(y, f) = I\theta_{f,x,\omega}(X)$. D'où l'égalité $J_G(y, f') = J_G(y, f)$. Cela prouve (1) et le lemme. $\square$

3 Majorations pour le groupe linéaire GL_k

3.1 Le groupe linéaire

Soient $k \geq 1$ un entier, V un espace vectoriel sur F de dimension k et $(v_i)_{i=1,...,k}$ une base de V. On note simplement GL_k le groupe (algébrique) des automorphismes linéaires de V. Pour $g \in GL_k(F)$, on note $(g_{i,j})_{i,j=1,...,k}$ sa matrice dans la base fixée. On note B_k le sous-groupe de Borel triangulaire supérieur de GL_k, U_k son radical unipotent et A_k le sous-tore diagonal. Pour $a \in A_k(F)$, on note simplement $a_i = a_{i,i}$ son coefficient diagonal, pour $i = 1, ..., k$. On note K_k le sous-groupe compact spécial de $GL_k(F)$ formé des éléments à coefficients entiers.

La théorie du R-groupe est "triviale" pour le groupe linéaire. C'est-à-dire que les représentations tempérées irréductibles et elliptiques de $GL_k(F)$ sont de la série discrète.

Ces notations seront utilisées pour divers espaces, parfois sans que l'on précise leur base. Ou bien le choix de cette base sera implicite, ou bien il n'aura pas d'importance.

Dans la suite de cette section, on fixe un entier $k \geq 1$, on pose $G = GL_k$, et on utilise les notations ci-dessus dont on supprime l'indice k.

3.2 Une majoration

Pour tout $g \in G(F)$, on note $g = a_B(g)u_B(g)k_B(g)$ une décomposition de g telle que $a_B(g) \in A(F)$, $u_B(g) \in U(F)$, $k_B(g) \in K$. Pour un entier $c \geq 1$, on note $U(F)_c$ le sous-groupe des éléments $u \in U(F)$ tels que $val_F(u_{i,i+1}) \geq -c$ pour tout $i = 1, ..., k-1$. Soient $D \in \mathbb{R}$ et $g \in G(F)$, posons

$$I(c, D, g) = \int_{U(F)_c} \Xi^G(ug)\sigma(ug)^D du.$$

Proposition. *Cette intégrale est convergente. Pour tout D, il existe un réel R tel que*

$$I(c, D, g) << c^R \sigma(g)^R \delta_B(a_B(g))^{1/2}$$

pour tous $c \geq 1$ et tout $g \in G(F)$.

La preuve sera donnée en 3.4

3.3 Un lemme auxiliaire

Supposons $k \geq 2$, notons $P = MU_P$ le sous-groupe parabolique des éléments de G qui conservent la droite Fv_1. Soient $c \geq 1$ un entier, D un réel et $m \in M(F)$. Posons $U_P(F)_c = U_P(F) \cap U(F)_c$ et

$$I_P(c, D, m) = \int_{U_P(F)_c} \Xi^G(um)\sigma(um)^D du.$$

Lemme. *Cette intégrale est convergente. Pour tout D, il existe un réel R tel que*

$$I_P(c, D, m) << c^R \sigma(m)^R \delta_P(m)^{1/2} \Xi^M(m)$$

pour tout $c \geq 1$ et tout $m \in M(F)$.

Preuve. Le réel D est fixé. Soit $b \geq 0$ un réel. On a introduit en 1.1 la fonction $\mathbf{1}_{\sigma \geq b}$. Notons $U_\natural$ le sous-groupe des éléments $u \in U_1$ tels que $u_{1,2} = 0$. Posons

$$I_\natural(b, D) = \int_{U_\natural(F)} \mathbf{1}_{\sigma \geq b}(u)\delta_{\bar{B}}(a_{\bar{B}}(u))^{1/2}\sigma(u)^D du.$$

Montrons que

(1) cette intégrale est convergente et il existe $\epsilon>0$ tel que

$$I_\natural(b,D)<<exp(-\epsilon b)$$

pour tout $b\geq 0$.

Considérons le sous-espace V'' de V engendré par les éléments $v_1,v_3,...,v_k$. Soit $G''=GL_{k-1}$ son groupe d'automorphismes, qui s'identifie à un sous-groupe de G. Le groupe $B''=G''\cap B$ est le sous-groupe de Borel standard de G'', $P''=G''\cap P$ est un sous-groupe parabolique de G'' et $U_\natural$ n'est autre que le radical unipotent de P''. D'après [W2] lemme II.4.2, il existe un entier $d\geq 0$ tel que l'intégrale

$$(2)\qquad \int_{U_\natural(F)}\delta_{\bar{B}''}(a_{\bar{B}''}(u))^{1/2}\sigma(u)^{-d}du$$

soit convergente. Soit $u\in U_\natural(F)$. On peut supposer $a_{\bar{B}}(u)=a_{\bar{B}''}(u)$. Notons $a_1,...,a_k$ les coefficients diagonaux de cet élément. On peut supposer $a_2=1$ et $\prod_{i=1,...,k}a_i=1$. On a

$$\delta_{\bar{B}}(a_{\bar{B}}(u))^{1/2}=\prod_{i=1,...,k}|a_i|_F^{i-(k+1)/2},$$

tandis que

$$\delta_{\bar{B}''}(a_{\bar{B}''}(u))^{1/2}=|a_1|_F^{1-k/2}\prod_{i=3,...,k}|a_i|_F^{i-1-k/2}.$$

D'où

$$\delta_{\bar{B}}(a_{\bar{B}}(u))^{1/2}=|a_1|_F^{-1/2}\left(\prod_{i=3,...,k}|a_i|_F^{1/2}\right)\delta_{\bar{B}''}(a_{\bar{B}''}(u))^{1/2}=|a_1|_F^{-1}\delta_{\bar{B}''}(a_{\bar{B}''}(u))^{1/2}.$$

L'égalité $u=a_{\bar{B}''}(u)u_{\bar{B}''}(u)k_{\bar{B}''}(u)$ et un calcul matriciel entraînent que

$$val_F(a_1)=inf\{val_F(u_{1,j});j=1,3,...,k\},$$

d'où $-val_F(a_1)>>\sigma(u)$. Il existe donc $\epsilon>0$ tel que $|a_1|_F^{-1}<<exp(-2\epsilon\sigma(u))$. Si $\mathbf{1}_{\sigma\geq b}(u)=1$, on transforme cette relation en $|a_1|_F^{-1}<<exp(-\epsilon b)exp(-\epsilon\sigma(u))$. On obtient

$$I_\natural(b,D)<<exp(-\epsilon b)\int_{U_\natural(F)}\delta_{\bar{B}''}(a_{\bar{B}''}(u))^{1/2}exp(-\epsilon\sigma(u))du.$$

La dernière intégrale est convergente d'après la convergence de (2). D'où (1).

Introduisons un réel $b\geq 0$, que nous préciserons par la suite. On peut écrire

$$(3)\qquad I_P(c,D,m)=I_{<b}(c,D,m)+I_{\geq b}(c,D,m),$$

où

$$I_{<b}(c,D,m)=\int_{U_P(F)_c}\Xi^G(um)\sigma(um)^D\mathbf{1}_{\sigma<b}(um)du,$$

et

$$I_{\geq b}(c,D,m)=\int_{U_P(F)_c}\Xi^G(um)\sigma(um)^D\mathbf{1}_{\sigma\geq b}(um)du.$$

Dans la première intégrale, on a $\sigma(um) < b$ et l'intégrale est donc majorée par

$$b^{D'}\int_{U_P(F)}\Xi^G(um)\sigma(um)^{D-D'}du$$

pour tout réel $D' \geq 0$. D'après [W2] proposition II.4.5, on peut choisir D' tel que cette dernière intégrale soit convergente et essentiellement bornée par $\delta_P(m)^{1/2}\Xi^M(m)$. Pour un tel D', on a donc

$$(4) \qquad I_{<b}(c,D,m) << b^{D'}\delta_P(m)^{1/2}\Xi^M(m).$$

Introduisons le sous-groupe $U_{1,2}$ de U_P formé des éléments u dont la seule coordonnée non diagonale non nulle est $u_{1,2}$ et posons $U_{1,2}(F)_c = U_{1,2}(F) \cap U(F)_c$. On a $U_P(F)_c = U_\natural(F)U_{1,2}(F)_c$, d'où

$$I_{\geq b}(c,D,m) = \int_{U_{1,2}(F)_c}\int_{U_\natural(F)}\Xi^G(u_\natural vm)\sigma(u_\natural vm)^D\mathbf{1}_{\sigma\geq b}(u_\natural vm)du_\natural dv.$$

Fixons $v \in U_{1,2}(F)_c$ et considérons l'intégrale intérieure, que l'on note $I_{\geq b}(c,D,m,v)$. On a

(5) il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\Xi^G(gg') << \Xi^G(g)exp(\alpha\sigma(g'))$$

pour tous $g, g' \in G(F)$.

En effet, par définition,

$$\Xi^G(g) = \int_K \delta_B(a_B(kg))^{1/2}dk.$$

On a $a_B(kgg') = a_B(kg)a_B(k_B(kg)g')$ et il existe $\alpha > 0$ tel que $\delta_B(a_B(k_B(kg)g'))^{1/2} << exp(\alpha\sigma(g'))$. D'où le résultat.

Remarque. La propriété (5) est vraie pour tout groupe réductif connexe.

On a la majoration $\sigma(gg') \leq \sigma(g) + \sigma(g')$ pour tous $g, g' \in G(F)$. On a aussi une majoration $\sigma(v) << c$. Il existe donc $c_1 > 0$ tel que $\sigma(u_\natural) \geq c_1\sigma(u_\natural vm) - c - \sigma(m)$. Quand $\mathbf{1}_{\sigma\geq b}(u_\natural vm) = 1$, on a $\sigma(u_\natural) \geq c_1 b - c - \sigma(m)$. Imposons à b la condition $c_1 b - c - \sigma(m) > 0$. D'autre part, d'après [W2] lemmes II.1.1 et II.3.2, il existe un réel D'' tel que l'on ait une majoration

$$\Xi^G(g) << \delta_{\bar{B}}(a_{\bar{B}}(g))^{1/2}\sigma(g)^{D''}.$$

Ces relations entraînent la majoration

$$I_{\geq b}(c,D,m,v) << exp(\alpha\sigma(vm))\sigma(vm)^{D+D''}\int_{U_\natural(F)}\delta_{\bar{B}}(a_{\bar{B}}(u))^{1/2}\sigma(u)^{D+D''}\mathbf{1}_{\sigma\geq c_1b-c-\sigma(m)}(u)du$$

$$<< exp(c_2c)exp(c_2\sigma(m))I_\natural(c_1b - c - \sigma(m), D + D'')$$

pour un $c_2 > 0$ convenable. Cette expression ne dépend plus de v. Le terme $I_{\geq b}(c,D,m)$ est majoré par la même expression, multipliée par $mes(U_{1,2}(F)_c)$. Cette mesure est majorée par $exp(c_3c)$ pour un $c_3 > 0$ convenable. D'où

$$I_{\geq b}(c,D,m) << exp(c_4c)exp(c_2\sigma(m))I_\natural(c_1b - c - \sigma(m), D + D''),$$

où $c_4 = c_2 + c_3$. Il existe aussi $c_5 > 0$ tel que l'on ait la minoration

$$exp(-c_5\sigma(m)) << \delta_P(m)^{1/2}\Xi^M(m).$$

D'où

$$I_{\geq b}(c, D, m) << \delta_P(m)^{1/2}\Xi^M(m)exp(c_4c)exp(c_6\sigma(m))I_\natural(c_1b - c - \sigma(m), D + D''),$$

où $c_6 = c_2 + c_5$. Utilisons la relation (1). On voit qu'il existe $c_7 > 0$ tel que, pour $b = c_7(c + \sigma(m))$, le produit des trois derniers termes ci-dessus est borné. Choisissons b ainsi. Alors

$$I_{\geq b}(c, D, m) << \delta_P(m)^{1/2}\Xi^M(m).$$

Cette majoration et les relations (3) et (4) entraînent celle de l'énoncé. $\square$

3.4 Preuve de la proposition 3.2

On démontre la proposition par récurrence sur k. Le cas $k = 1$ est évident. Supposons $k \geq 2$. Remarquons tout d'abord que l'on peut se limiter à démontrer la majoration de l'énoncé pour $g = a \in A(F)$. En effet, pour g quelconque, on écrit $g = vak$, avec $v \in U(F)$, $a \in A(F)$, $k \in K$. Effectuons le changement de variable $u \mapsto uv^{-1}$. Le nouveau domaine d'intégration est $U(F)_cv$. Mais il existe $c_1 > 0$ tel que cet ensemble soit inclus dans $U(F)_{c+c_1\sigma(g)}$. Alors

$$I(c, D, g) \leq I(c + c_1\sigma(g), D, a).$$

Si le deuxième terme vérifie une majoration comme dans l'énoncé, le premier terme aussi. Supposons donc $g = a \in A(F)$. Avec les notations du paragraphe précédent, on a

$$I(c, D, a) = \int_{M(F)\cap U(F)_c} \int_{U_P(F)_c} \Xi^G(uva)\sigma(uva)^D du\, dv$$

$$= \int_{M(F)\cap U(F)_c} I_P(c, D, va)dv.$$

En appliquant le lemme 3.3, on a

$$I(c, D, a) << c^R \int_{M(F)\cap U(F)_c} \delta_P(va)^{1/2}\Xi^M(va)\sigma(va)^R dv.$$

Ecrivons $M = GL_1 \times G'$, où $G' = GL_{k-1}$ et affectons d'un $'$ les objets relatifs à G'. Ecrivons aussi $a = (a_1, a')$, avec $a_1 \in F^\times$ et $a' \in A'(F)$. On a $\delta_P(va)^{1/2} = \delta_B(a)^{1/2}\delta_{B'}(a')^{-1/2}$, $\Xi^M(va) = \Xi^{G'}(va')$ et $\sigma(va)^R << \sigma(a)^R\sigma(va')^R$. On obtient

$$I(c, D, a) << c^R\sigma(a)^R\delta_B(a)^{1/2}\delta_{B'}(a')^{-1/2}I'(c, R, a').$$

En utilisant la majoration du dernier terme fournie par l'hypothèse de récurrence, on obtient celle cherchée. $\square$

3.5 Modèles de Whittaker et intégrales de coefficients

On définit un caractère ξ de $U(F)$ par la formule

$$\xi(u) = \psi(\sum_{i=1,\ldots,k-1} u_{i,i+1}).$$

Soit $\mu \in Temp(G)$. On appelle fonctionnelle de Whittaker sur E_μ une application linéaire $\phi : E_\mu \to \mathbb{C}$ telle que $\phi(\mu(u)e) = \xi(u)\phi(e)$ pour tous $u \in U(F)$ et $e \in E_\mu$. Comme on le sait, l'espace des fonctionnelles de Whittaker sur E_μ est une droite. Soit $c \geq 1$ un entier. Définissons une forme sesquilinéaire $\mathcal{L}_{\mu,c}$ sur E_μ (ce qui est un raccourci pour dire qu'il s'agit d'une forme sur $E_\mu \times E_\mu$) par

$$\mathcal{L}_{\mu,c}(e', e) = \int_{U(F)_c} (e', \mu(u)e)\bar{\xi}(u)du.$$

Cette intégrale est absolument convergente d'après la proposition 3.2. Notons $\omega_{[1,k-1]}(c)$ le sous-groupe des $a \in A(F)$ tels que $a_k = 1$ et $val_F(1 - a_i) \geq c$ pour tout $i = 1, .., k-1$.

Lemme. *Pour tous $e, e' \in E_\mu$, il existe un entier $c_0 \geq 1$ tel que $\mathcal{L}_{\mu,c}(e', e)$ soit indépendant de c pour $c \geq c_0$. Plus précisément, soit $c' \geq 1$ un entier. Il existe c_0 tel que cette conclusion soit vérifiée pour tous $e, e' \in E_\mu^{\omega_{[1,k-1]}(c')}$.*

Preuve. Soient $e, e' \in E_\mu^{\omega_{[1,k-1]}(c')}$. Choisissons c_0 tel que $c_0 \geq 1$ et $-c_0 + c' \leq c_\psi$. Pour $c \geq c_0$, notons $U(F)_c - U(F)_{c_0}$ le complémentaire de $U(F)_{c_0}$ dans $U(F)_c$. Il suffit de prouver que

$$\int_{U(F)_c - U(F)_{c_0}} (e', \mu(u)e)\bar{\xi}(u)du = 0.$$

Soit $a \in \omega_{[1,k-1]}(c')$. Dans l'intégrale précédente, on peut remplacer e' et e par $\mu(a)e'$ et $\mu(a)e$. Par le changement de variables $u \mapsto aua^{-1}$, l'intégrale devient

$$\int_{U(F)_c - U(F)_{c_0}} (e', \mu(u)e)\bar{\xi}(aua^{-1})du.$$

Elle est donc aussi égale à

$$mes(\omega_{[1,k-1]}(c'))^{-1} \int_{\omega_{[1,k-1]}(c')} \int_{U(F)_c - U(F)_{c_0}} (e', \mu(u)e)\bar{\xi}(aua^{-1})du\, da.$$

Cette expression est absolument convergente et on peut permuter les intégrales. Mais

$$\int_{\omega_{[1,k-1]}(c')} \bar{\xi}(aua^{-1})da = 0$$

pour tout $u \in U(F)_c - U(F)_{c_0}$. Cela prouve la nullité cherchée et le lemme. $\square$

On définit une forme sesquilinéaire $\mathcal{L}_\mu$ sur E_μ par

$$\mathcal{L}_\mu(e', e) = lim_{c\to\infty}\mathcal{L}_{\mu,c}(e', e).$$

Cette forme vérifie les relations

$$\mathcal{L}_\mu(\mu(u')e', \mu(u)e) = \xi(u)\bar{\xi}(u')\mathcal{L}_\mu(e', e).$$

Fixons une fonctionnelle de Whittaker ϕ sur E_μ, non nulle. Alors il existe $C_\mu \in \mathbb{C}$ tel que

$$\mathcal{L}_\mu(e', e) = C_\mu \overline{\phi(e')}\phi(e)$$

pour tous e, e'. On montrera plus loin que $C_\mu \neq 0$.

Pour un entier $c' \in \mathbb{N}$, notons $\iota_{c'}$ la fonction caractéristique du sous-ensemble des $a \in A(F)$ tels que $val_F(a_i) \geq val_F(a_{i+1}) - c'$ pour tout $i = 1, ..., k-1$. On a

(1) il existe un réel R et, pour tous $e, e' \in E_\mu$, il existe un entier $c' \in \mathbb{N}$ tel que

$$|\mathcal{L}_\mu(\mu(a')e', \mu(a)e)| << \iota_{c'}(a')\delta_B(a')^{1/2}\sigma(a')^R \iota_{c'}(a)\delta_B(a)^{1/2}$$

pour tous $a, a' \in A(F)$.

Si $C_\mu = 0$, c'est évident : $\mathcal{L}_\mu = 0$. Sinon, fixons $e_0 \in E_\mu$ tel que $\phi(e_0) = 1$. On a

$$\mathcal{L}_\mu(\mu(a')e', \mu(a)e) = C_\mu \overline{\phi(\mu(a')e')}\phi(\mu(a)e) = C_\mu \overline{\phi(\mu(a')e')}\phi(e_0)\overline{\phi(e_0)}\phi(\mu(a)e)$$

$$= \overline{C_\mu}^{-1}\overline{\mathcal{L}_\mu(e_0, \mu(a')e')}\mathcal{L}_\mu(e_0, \mu(a)e).$$

Cela nous ramène à majorer $|\mathcal{L}_\mu(e_0, \mu(a)e)|$. D'après le lemme ci-dessus, on peut remplacer $\mathcal{L}_\mu$ par $\mathcal{L}_{\mu,c}$ pour c assez grand. La majoration voulue résulte de la proposition 3.2 et du fait bien connu qu'il existe c' tel que le support de la fonction $a \mapsto \phi(\mu(a)e)$ soit contenu dans celui de $\iota_{c'}$

3.6 Quelques égalités d'intégrales

Soit h un entier tel que $1 \leq h \leq k$. Notons P^h le sous-groupe parabolique de G formé des éléments qui conservent le drapeau

$$Fv_1 \oplus ... \oplus Fv_h \subset Fv_1 \oplus ... \oplus Fv_{h+1} \subset ... \subset Fv_1 \oplus ... \oplus Fv_k.$$

Ecrivons $P^h = M^h U^h$, où M^h est la composante de Lévi qui contient A. On a $M^h = GL_h \times GL_1 \times ... \times GL_1$, avec $k-h$ termes GL_1. Identifions GL_{h-1} au groupe des automorphismes linéaires du sous-espace de V engendré par $v_1, ..., v_{h-1}$. Pour un entier $c \geq 1$, notons $\omega_{[h,k-1]}(c)$ le sous-groupe des $\gamma \in A(F)$ tels que $\gamma_1 = ... = \gamma_{h-1} = 1$, $\gamma_k = 1$ et $val_F(1-\gamma_i) \geq c$ pour $i = h, ..., k-1$. Posons $U^h(F)_c = U(F)_c \cap U^h(F)$. Supposons $c + c_\psi \geq 1$. Pour $\mu \in Temp(G)$ et $e, e' \in E_\mu$, posons

$$I_c^h(e', e) = \int_{\omega_{[h,k-1]}(c+c_\psi)} \int_{U_{h-1}(F)\backslash GL_{h-1}(F)} \mathcal{L}_\mu(\mu(\gamma g)e', \mu(\gamma g)e)|det(g)|_F^{h-k} dg\, d\gamma,$$

$$J_c^h(e', e) = \int_{U^h(F)_c} (e', \mu(u)e)\bar{\xi}(u)du.$$

Lemme. *Soient h un entier tel que $1 \leq h \leq k$ et c un entier tel que $c \geq 1$ et $c + c_\psi \geq 1$. Les intégrales ci-dessus sont absolument convergentes. Il existe $C > 0$ tel que*

$$J_c^h(e', e) = C I_c^h(e', e)$$

pour tous $e, e' \in E_\mu$.

Preuve. Prouvons la convergence de $I_c^h(e',e)$. L'intégrale sur le groupe compact $\omega_{[h,k-1]}(c+c_\psi)$ est insignifiante, on peut l'oublier. On décompose $g \in U_{h-1}(F)\backslash GL_{h-1}(F)$ en $g = ak$, avec $a \in A_{h-1}(F)$, $k \in K$. La mesure devient $\delta_{B_{h-1}}(a)^{-1}dadk$. De nouveau, on peut oublier l'intégrale sur K et on doit majorer

$$\int_{A_{h-1}(F)} |\mathcal{L}_\mu(\mu(a)e', \mu(a)e)||det(a)|_F^{h-k}\delta_{B_{h-1}}^{-1}(a)da.$$

Grâce à 3.5(1), c'est majoré par

$$\int_{A_{h-1}(F)} \iota_{c'}(a)\delta_B(a)|det(a)|_F^{h-k}\delta_{B_{h-1}}^{-1}(a)da$$

pour un entier c' convenable. Pour $a \in A_{h-1}(F)$, on a

$$\delta_B(a)|det(a)|_F^{h-k}\delta_{B_{h-1}}^{-1}(a) = |det(a)|_F$$

et il est immédiat que l'intégrale

$$\int_{A_{h-1}(F)} \iota_{c'}(a)|det(a)|_F da$$

est convergente.

Prouvons la convergence de $J_c^h(e',e)$. Il suffit de prouver que

$$\int_{U^h(F)_c} \Xi^G(u)du$$

est convergente. Puisqu'on en aura besoin plus loin, prouvons la propriété plus forte suivante. On s'autorise pour un instant à faire varier l'entier c. Alors

(1) il existe un réel R tel que

$$\int_{U^h(F)_c} \Xi^G(m^{-1}um)du << c^R\sigma(m)^R\delta_{P^h}(m)$$

pour tous $c \geq 1$ et tout $m \in M^h(F)$

Notons $X(m)$ l'intégrale ci-dessus. On peut écrire $m = vak$, avec $v \in U(F) \cap M^h(F)$, $a \in A(F)$ et $k \in K \cap M^h(F)$. La conjugaison par v conserve $U^h(F)_c$, ce qui permet de faire disparaître v. Le terme k disparaît également. Puisque $\sigma(a) << \sigma(m)$ et $\delta_{P^h}(a) = \delta_{P^h}(m)$, on est ramené au cas où $m = a$. Effectuons le changement de variable $u \mapsto aua^{-1}$. Cela remplace du par $\delta_{P^h}(a)du$ et le domaine d'intégration $U^h(F)_c$ par l'ensemble des $u \in U^h(F)$ tels que

$$val_F(u_{i,i+1}) \geq -c + val_F(a_{i+1}) - val_F(a_i)$$

pour tout $i = h, ..., k-1$. Il existe $c_1 > 0$ tel que $val_F(a_{i+1}) - val_F(a_i) \geq -c_1\sigma(a)$. L'ensemble ci-dessus est donc contenu dans $U^h(F)_{c+c_1\sigma(a)}$ on obtient

$$X(a) \leq \delta_{P^h}(a) \int_{U^h(F)_{c+c_1\sigma(a)}} \Xi^G(u)du.$$

Pour $u'\in M^h(F)\cap U(F)\cap K$, on a $\Xi^G(u)=\Xi^G(uu')$. On peut donc remplacer ci-dessus u par uu', puis intégrer en u'. D'où

$$X(a)<<\delta_{P^h}(a)\int_{M^h(F)\cap U(F)\cap K}\int_{U^h(F)_{c+c_1\sigma(a)}}\Xi^G(uv)du\,dv.$$

L'ensemble d'intégration est contenu dans $U(F)_{c+c_1\sigma(a)}$. Donc

$$X(a)<<\delta_{P^h}(a)\int_{U(F)_{c+c_1\sigma(a)}}\Xi^G(u)du.$$

Il ne reste plus qu'à faire appel à la proposition 3.2 pour obtenir (1).

Le groupe $A_{h-1}(F)$ agit à gauche sur $U_{h-1}(F)\backslash G_{h-1}(F)$. Introduisons le sous-groupe $\omega_{[1,h-1]}(c+c_\psi)$ de $A_{h-1}(F)$. Dans la définition de $I_c^h(e',e)$, on peut remplacer g par $\gamma' g$ pour $\gamma'\in\omega_{[1,h-1]}(c+c_\psi)$. On peut ensuite intégrer en γ', à condition de diviser le tout par $mes(\omega_{[1,h-1]}(c+c_\psi))$. Puisque $\omega_{[1,h-1]}(c+c_\psi)\omega_{[h,k-1]}(c+c_\psi)=\omega_{[1,k-1]}(c+c_\psi)$, on obtient

$$I_c^h(e',e)=mes(\omega_{[1,h-1]}(c+c_\psi))^{-1}\int_{\omega_{[1,k-1]}(c+c_\psi)}\int_{U_{h-1}(F)\backslash GL_{h-1}(F)}$$
$$\mathcal{L}_\mu(\mu(\gamma g)e',\mu(\gamma g)e)|det(g)|_F^{h-k}dg\,d\gamma.$$

Le même calcul qu'en 3.5 montre que

$$\int_{\omega_{[1,k-1]}(c+c_\psi)}\mathcal{L}_\mu(\mu(\gamma g)e',\mu(\gamma g)e)d\gamma=mes(\omega_{[1,k-1]}(c+c_\psi))\mathcal{L}_{\mu,c}(\mu(g)e',\mu(g)e).$$

D'où

$$(2)\qquad I_c^h(e',e)=mes(\omega_{[h,k-1]}(c+c_\psi))\int_{U_{h-1}(F)\backslash GL_{h-1}(F)}\mathcal{L}_{\mu,c}(\mu(g)e',\mu(g)e)|det(g)|_F^{h-k}dg.$$

On démontre maintenant le lemme par récurrence sur h. Pour $h=1$, l'intégrale ci-dessus disparaît et $I_c^1(e',e)=C\mathcal{L}_{\mu,c}(e',e)$, où $C>0$. Mais $U^h=U$ et $J_c^1(e',e)=\mathcal{L}_{\mu,c}(e',e)$ par définition. Supposons maintenant $h\geq 2$ et le lemme vrai pour $h-1$. Notons $\tilde{Y}$ le sous-groupe des éléments $y\in GL_{h-1}(F)$ qui vérifient

- pour $i=1,...,h-2$, $y_{i,i}=1$;
- pour $i,j=1,...,h-1$, avec $i\neq j$ et $i\neq h-1$, $y_{i,j}=0$.

Par l'application $y\mapsto(y_{h-1,1},...,y_{h-1,h-1})$, $\tilde{Y}$ s'identifie au complémentaire d'un hyperplan (l'hyperplan $y_{h-1,h-1}=0$) dans un espace vectoriel Y de dimension $h-1$ sur F. On note dy la mesure de Haar sur Y et sa restriction à $\tilde{Y}$ (ce n'est pas une mesure de Haar sur cet ensemble). On vérifie qu'il existe $C_0>0$ tel que, pour toute fonction intégrable φ sur $U_{h-1}(F)\backslash GL_{h-1}(F)$, on ait l'égalité

$$\int_{U_{h-1}(F)\backslash GL_{h-1}(F)}\varphi(g)dg=C_0\int_{\tilde{Y}}\int_{U_{h-2}(F)\backslash GL_{h-2}(F)}\varphi(g'y)|det(g')|^{-1}dg'|y_{h-1,h-1}|_F^{-1}dy.$$

On déduit de cette égalité et de (2) la relation

$$I_c^h(e',e)=C_1\int_{\tilde{Y}}I_c^{h-1}(\mu(y)e',\mu(y)e)|y_{h-1,h-1}|_F^{h-k-1}dy$$

pour un $C_1 > 0$ convenable. Grâce à l'hypothèse de récurrence, on en déduit qu'il existe $C_2 > 0$ tel que

$$I_c^h(e', e) = C_2 \int_{\tilde{Y}} J_c^{h-1}(\mu(y)e', \mu(y)e)|y_{h-1,h-1}|_F^{h-k-1} dy$$

$$= C_2 \int_{\tilde{Y}} \int_{U^{h-1}(F)_c} (\mu(y)e', \mu(uy)e)\bar{\xi}(u) du |y_{h-1,h-1}|_F^{h-k-1} dy.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, notons Y_n le sous-ensemble des $y \in Y$ tels que $val_F(y_{h-1,j}) \geq -n$ pour tout $j = 1, ..., h-1$. On a

$$(3) \qquad I_c^h(e', e) = C_2 lim_{n\to\infty} X_n,$$

où

$$X_n = \int_{Y_n \cap \tilde{Y}} \int_{U^{h-1}(F)_c} (\mu(y)e', \mu(uy)e)\bar{\xi}(u) du |y_{h-1,h-1}|_F^{h-k-1} dy.$$

Cette dernière expression est absolument convergente. En effet, remplaçons tous les termes par leurs valeurs absolues. D'après (1), l'intégrale intérieure est majorée par $\sigma(y)^R \delta_{P^{h-1}}(y) = \sigma(y)^R |y_{h-1,h-1}|_F^{k+1-h}$. L'expression totale est donc majorée par

$$\int_{Y_n} \sigma(y)^R dy$$

qui est convergente. Posons $Z = U^{h-1}(F) \cap M^h(F)$. Pour $y \in Y$ et $z \in Z$, posons $x(y, z) = \sum_{i=1,...,h-1} y_{h-1,i} z_{i,h}$. Pour $y \in Y$, notons $Z(y)$ le sous-ensemble des $z \in Z$ tels que $val_F(x(y, z)) \geq -c$ et , pour $z \in Z$, notons $Y(z)$ le sous-ensemble des $y \in Y$ vérifiant la même condition. Dans X_n, effectuons le changement de variable $u \mapsto yuy^{-1}$. Cela remplace le domaine d'intégration $U^{h-1}(F)_c$ par $U^h(F)_c Z(y)$, donc la variable u par vz, avec $v \in U^h(F)_c$ et $z \in Z(y)$, la mesure du par $|y_{h-1,h-1}|_F^{k+1-h} dz\, dv$ et $\xi(u)$ par $\xi(v)\psi(x(y, z))$. On obtient

$$X_n = \int_{Y_n \cap \tilde{Y}} \int_{U^h(F)_c} \int_{Z(y)} (e', \mu(vz)e)\bar{\xi}(v)\bar{\psi}(x(y, z)) dz\, dv\, dy.$$

D'après l'absolue convergence de cette expression, on peut permuter les intégrales et on obtient

$$X_n = \int_{U^h(F)_c} X_n(v)\bar{\xi}(v) dv,$$

où

$$X_n(v) = \int_Z (e', \mu(vz)e) \int_{Y_n \cap Y(z) \cap \tilde{Y}} \bar{\psi}(x(y, z)) dy\, dz$$

$$= \int_Z (e', \mu(vz)e) \int_{Y_n \cap Y(z)} \bar{\psi}(x(y, z)) dy\, dz.$$

Fixons $z \in Z$. L'ensemble $Y_n \cap Y(z)$ est un $\mathfrak{o}_F$-réseau dans Y et l'application $y \mapsto \bar{\psi}(x(y, z))$ est un caractère de Y. Son intégrale sur le réseau est nulle si le caractère y est non trivial et vaut la mesure du réseau si le caractère y est trivial. On a

(4) le caractère $y \mapsto \bar{\psi}(x(y, z))$ est trivial sur $Y_n \cap Y(z)$ si et seulement si $val_F(z_{i,h}) \geq n + c_\psi$ pour tout $i = 1, ..., h-1$.

En effet, ce caractère est trivial si et seulement si $val_F(x(y, z)) \geq c_\psi$ pour tout $y \in Y_n \cap Y(z)$. Cette condition est satisfaite si z vérifie les conditions de (3). Inversement, s'il existe i tel que $val_F(z_{i,h}) < n + c_\psi$, soit $y \in Y$ dont la seule coordonnée non nulle soit $y_{h-1,i}$ de valuation $c_\psi - val_F(z_{i,h)} - 1$. Ce nombre est $\geq -n$, donc $y \in Y_n$. On a $val_F(x(y,z)) = c_\psi - 1$. On a supposé $c + c_\psi \geq 1$, donc $val_F(x(y,z)) \geq -c$, ce qui entraîne $y \in Y(z)$. La condition $val_F(x(y,z)) \geq c_\psi$ n'est pas vérifiée pour cet y. D'où (4).

Notons Z^n l'ensemble des $z \in Z$ vérifiant les conditions de (4). Alors

$$X_n(v) = \int_{Z^n} (e', \mu(vz)e) mes(Y_n \cap Y(z)) dz.$$

L'inégalité $c + c_\psi \geq 1$ entraîne que, pour $z \in Z^n$, on a $Y_n \cap Y(z) = Y_n$. D'autre part, si n est assez grand, on a $\mu(z)e = e$ pour tout $z \in Z^n$. Alors

$$X_n(v) = mes(Y_n) mes(Z^n)(e', \mu(v)e).$$

Le produit des mesures est une constante positive, disons C_3. Pour n assez grand, on a donc

$$X_n = C_3 \int_{U^h(F)_c} (e', \mu(v)e)\bar{\xi}(v) dv = C_3 J_c^h(e', e).$$

En reportant cette égalité dans (3), on obtient

$$I_c^h(e', e) = C_2 C_3 J_c^h(e', e),$$

ce qui achève la preuve. $\square$

3.7 Propriétés des fonctionnelles de Whittaker

Soient $\mu \in Temp(G)$. Appliquons le lemme précédent pour $h = k$. On obtient une égalité

$$\int_{U_{k-1}(F)\backslash GL_{k-1}(F)} \mathcal{L}_\mu(\mu(g)e', \mu(g)e) dg = C(e', e)$$

pour tous $e, e' \in E_\mu$, où C est une constante positive. Il en résulte que $\mathcal{L}_\mu$ est non nulle, autrement dit que la constante C_μ du paragraphe 3.5 est non nulle. On peut alors récrire la relation 3.5(1) et le lemme 3.6 sous la forme suivante.

Lemme. *Soient $\mu \in Temp(G)$ et ϕ une fonctionnelle de Whittaker non nulle sur E_μ.*

(i) Il existe un réel R et, pour tout $e \in E_\mu$, il existe $c' \in \mathbb{N}$ tel que

$$|\phi(\mu(a)e)| << \iota_{c'}(a)\delta_B(a)^{1/2}\sigma(a)^R$$

pour tout $a \in A(F)$.

(ii) Pour tout $h = 1, ..., k$ et tout entier c tel que $c \geq 1$ et $c + c_\psi \geq 1$, il existe $C > 0$ tel que l'on ait l'égalité

$$\int_{\omega_{[h,k-1]}(c+c_\psi)} \int_{U_{h-1}(F)\backslash GL_{h-1}(F)} \overline{\phi(\mu(ag)e')}\phi(\mu(ag)e)|det(g)|_F^{h-k} dg\, da$$

$$= C \int_{U^h(F)_c} (e', \mu(u)e)\bar{\xi}(u) du$$

pour tous $e, e' \in E_\mu$.

4 Majorations pour un groupe spécial orthogonal

4.1 Les groupes spéciaux orthogonaux

Soit (V, q_V) un espace quadratique sur F, c'est-à-dire que V est un espace vectoriel de dimension finie sur F et q_V est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur V (on dira souvent que V est un espace quadratique, la forme q_V étant sous-entendue). On note aussi q_V la forme quadratique définie par $q_V(v) = q_V(v,v)/2$. On note d_V la dimension de V et G le groupe spécial orthogonal de V. Considérons un système hyperbolique maximal $(v_{\pm i})_{i=1,...,l}$ dans V ("système hyperbolique" signifie que $q_V(v_i, v_j) = \delta_{i,-j}$ pour tous i, j, où $\delta_{i,-j}$ est le symbole de Kronecker). Notons Z le sous-espace de V engendré par ce système et V_{an} l'orthogonal de Z dans V. La restriction $q_{V_{an}}$ de q_V à V_{an} est anisotrope. On note $d_{an,V}$ la dimension de V_{an}. Fixons un réseau spécial $R_{an} \subset V_{an}$ ([W1] 7.1). On peut choisir un réseau R_Z de Z ayant une base formée de vecteurs proportionnels aux v_i, de sorte que $R = R_Z \oplus R_{an}$ soit spécial. On note K le stabilisateur de R dans $G(F)$. C'est un sous-groupe compact spécial de $G(F)$. Considérons une suite d'entiers $(k_1, ..., k_s)$ telle que $k_j \geq 1$ pour tout j et $\sum_{j=1,...,s} k_j \leq l$. Pour tout j, notons Z_j, resp. Z_{-j}, le sous-espace de V engendré par les v_i, resp. v_{-i}, pour $i = k_1 + ... + k_{j-1} + 1, ..., k_1 + ... + k_j$. Notons $\tilde{V}$ l'orthogonal dans V de la somme des $Z_{\pm j}$ et notons $\tilde{G}$ le groupe spécial orthogonal de $\tilde{V}$. Notons P le sous-groupe parabolique de G formé des éléments qui conservent le drapeau de sous-espaces

$$Z_1 \subset Z_1 \oplus Z_2 \subset ... \subset Z_1 \oplus ... \oplus Z_s.$$

Notons M la composante de Lévi de P formée des éléments qui conservent chaque sous-espace $Z_{\pm j}$. On a

$$(1) \qquad M \simeq GL_{k_1} \times ... \times GL_{k_s} \times \tilde{G}.$$

On sait que K est en bonne position relativement à M. Inversement, si $P = MU$ est un sous-groupe parabolique de G, si K est un sous-groupe compact spécial de $G(F)$ en bonne position relativement à M, on peut trouver un système hyperbolique, un réseau spécial et une suite d'entiers de sorte que P, M et K soient déterminés comme ci-dessus (ces données ne sont pas uniques). Si $s = l$ et $k_j = 1$ pour tout j, M est un Lévi minimal et inversement, si M est un Lévi minimal, on peut supposer ces égalités vérifiées.

Dans la situation ci-dessus, supposons M minimal et notons-le plutôt M_{min}. L'application naturelle $K \cap Norm_{G(F)}(M_{min}) \to W^G$ est surjective et il est utile de remarquer qu'elle possède une section $\iota : W^G \to K \cap Norm_{G(F)}(M_{min})$ qui est un homomorphisme de groupes. En effet, pour tout $i = \pm 1, ..., \pm l$, fixons un élément $v'_i \in Fv_i$ de sorte que $(v'_i)_{i=\pm 1,...,\pm l}$ soit une base sur $\mathfrak{o}_F$ de R_Z. Parce que R est un réseau spécial, on peut supposer que $q_V(v'_i, v'_{-i}) = q_V(v'_{i'}, v'_{-i'})$ pour tous $i, i' = 1, ..., l$. Si $V_{an} \neq \{0\}$, fixons un élément g_{an} du groupe orthogonal de V_{an} tel que $det(g_{an}) = -1$ et $g_{an}^2 = 1$. L'action de tout élément de ce groupe orthogonal, en particulier l'action de g_{an}, conserve le réseau R_{an} . Notons W^K le sous-ensemble des éléments $g \in G(F)$ qui agissent par permutation sur l'ensemble $\{v_{\pm i}; i = 1, ..., l\}$ et agissent sur V_{an}, soit par l'identité, soit comme g_{an}. On vérifie que W^K est un sous-groupe de $K \cap Norm_{G(F)}(M_{min})$ et que l'application naturelle de W^K dans W^G est un isomorphisme.

Les hypothèses de 1.5 sont vérifiées pour le groupe G. Soient M un Lévi que l'on écrit sous la forme (1) et τ une représentation admissible irréductible et de la série discrète de $M(F)$. On a

$$\tau \simeq \mu_1 \otimes ... \otimes \mu_s \otimes \tilde{\tau},$$

où μ_j, resp. $\tilde{\tau}$, est une représentation de la série discrète de $GL_{k_j}(F)$, resp. $\tilde{G}(F)$. L'espace $\mathcal{A}_M$ s'identifie naturellement à $\mathbb{R}^s$. Supposons $R(\tau)\cap W(M)_{reg}\neq\emptyset$. Alors le groupe $R(\tau)$ s'identifie à un sous-groupe de $\{\pm 1\}^s$. Un élément $\epsilon=(\epsilon_1,...,\epsilon_s)$ de ce groupe agit sur $\mathbb{R}^s$ par

$$(x_1,...,x_s)\mapsto(\epsilon_1 x_1,...,\epsilon_s x_s).$$

Le groupe $R(\tau)$ contient l'élément $t=(-1,...,-1)$ de $\{\pm 1\}^s$, qui est l'unique élément de $R(\tau)\cap W(M)_{reg}$. On a $|det(t-1)_{|\mathcal{A}_M}|=2^{a_M}$.

Soit π une représentation tempérée irréductible et elliptique de $G(F)$. On peut trouver M, τ comme ci-dessus, et $\zeta\in R(\tau)^\vee$ de sorte que $\pi=Ind_P^G(\tau,\zeta)$, où P est un élément de $\mathcal{P}(M)$. Puisque la classe de conjugaison du couple (M,τ) est bien déterminée, on peut poser $r(\pi)=|R(\tau)|$ et $t(\pi)=2^{a_M}$.

4.2 Espaces quadratiques compatibles

Soient (V,q_V) et (W,q_W) deux espaces quadratiques. Notons G et H leurs groupes spéciaux orthogonaux, d_V et d_W les dimensions de V et W. Supposons par exemple $d_W\leq d_V$. On dit que les deux espaces quadratiques sont compatibles si d_V et d_W sont de parités distinctes et si W est isomorphe (comme espace quadratique) à un sous-espace de V dont l'orthogonal est déployé, c'est-à-dire une somme orthogonale $D_0\oplus Z$, où D_0 est une droite et Z est hyperbolique. On peut alors identifier W à un sous-espace de V et H à un sous-groupe de G. D'après le théorème de Witt, cette identification est unique à conjugaison près par un élément de $G(F)$.

Supposons que V soit la somme directe orthogonale de deux sous-espaces V' et Z', avec Z' hyperbolique. Alors V et W sont compatibles si et seulement si V' et W le sont.

Soient V et W deux espaces quadratiques compatibles, avec $d_W<d_V$. On fixe un isomorphisme $V=W\oplus D_0\oplus Z$ avec les propriétés ci-dessus, une base hyperbolique $(v_{\pm i})_{i=1,...,r}$ de Z et un élément non nul $v_0\in D_0$. On pose $V_0=W\oplus D_0$ et on note G_0 son groupe spécial orthogonal. On note A le sous-tore maximal du groupe spécial orthogonal de Z qui conserve chaque droite $Fv_{\pm i}$. Pour $a\in A(F)$ et $i=\pm 1,...,\pm r$, on note a_i la valeur propre de a sur le vecteur v_i. On note P le sous-groupe parabolique de G formé des éléments qui conservent le drapeau

$$Fv_r\subset Fv_r\oplus Fv_{r-1}\subset ...\subset Fv_r\oplus...\oplus Fv_1$$

de V. On note U le radical unipotent de P et M sa composante de Lévi qui contient A. On a l'égalité $M=AG_0$. On définit un caractère ξ de $U(F)$ par

$$\xi(u)=\psi(\sum_{i=0,...,r-1}q_V(uv_i,v_{-i-1})).$$

On fixe un réseau spécial $R_0\subset V_0$, cf. [W1] 7.1. On choisit, ainsi qu'il est loisible, un réseau $R_Z\subset Z$ possédant une base sur $\mathfrak{o}_F$ formée de vecteurs proportionnels aux $v_{\pm i}$ et tel que le réseau $R=R_0\oplus R_Z$ soit spécial. On note K le stabilisateur de R dans $G(F)$. Pour un entier $N\geq 1$, on définit une fonction κ_N sur $G(F)$ de la façon suivante. Elle est invariante à gauche par $U(F)$ et à droite par K. Sa restriction à $M(F)$ est la fonction caractéristique des éléments ag_0, avec $a\in A(F)$ et $g_0\in G_0(F)$, qui vérifient les conditions $|val_F(a_i)|\leq N$ pour tout $i=1,...,r$ et $g_0^{-1}e_0\in\mathfrak{p}_F^{-N}R_0$.

Remarque. Les constructions et notations ci-dessus seront utilisées sans plus de commentaires chaque fois que l'on se donnera des espaces quadratiques compatibles V et W avec $d_W < d_V$.

4.3 Les résultats

On énonce ici toutes les majorations que la section est destinée à prouver. On fixe pour toute cette section deux espaces quadratiques compatibles (V, q_V) et (W, q_W) tels que $d_V > d_W$.

(1) Il existe un réel R tel que

$$\int_{G(F)} \mathbf{1}_{\sigma<b}(g)dg << exp(Rb)$$

pour tout réel $b \geq 0$.

Remarque. Cette assertion vaut en fait pour tout groupe réductif connexe G.

Pour un entier $N \geq 1$ et un réel D, posons

$$I(N,D) = \int_{G(F)} \Xi^G(g)^2 \kappa_N(g)\sigma(g)^D dg.$$

(2) Cette intégrale est convergente ; le réel D étant fixé, il existe un réel R tel que

$$I(N,D) << N^R$$

pour tout entier $N \geq 1$.

Pour $u \in U(F)$ et tout $i = 1, ..., r$, on note $u_{i,i-1}$ la coordonnée $u_{i,i-1} = q_V(uv_{i-1}, v_{-i})$. Pour tout entier $c \geq 1$, on note $U(F)_c$ l'ensemble des $u \in U(F)$ tels que $val_F(u_{i,i-1}) \geq -c$ pour tout $i = 1, ..., r$. C'est un sous-groupe de $U(F)$ conservé par conjugaison par $H(F)$. Pour un réel D et un élément $m \in M(F)$, on pose

$$X(c, D, m) = \int_{U(F)_c} \Xi^G(um)\sigma(um)^D du.$$

(3) Cette expression est convergente. Pour D fixé, il existe un réel R tel que

$$X(c, D, m) << c^R \sigma(m)^R \delta_P(m)^{1/2} \Xi^M(m)$$

pour tous $c \geq 1$ et tout $m \in M(F)$.

(4) Pour tout réel D et tout entier $c \geq 1$, l'intégrale

$$\int_{H(F)U(F)_c} \Xi^H(h)\Xi^G(hu)\sigma(hu)^D du\, dh$$

est convergente.

(5) Pour tout réel D et tout entier $c \geq 1$, l'intégrale

$$\int_{H(F)U(F)_c} \int_{H(F)U(F)_c} \Xi^G(hu)\Xi^H(h'h)\Xi^G(h'u')\sigma(hu)^D \sigma(h'u')^D du'\, dh'\, du\, dh$$

est convergente.

Soient D et C deux réels, c, c' et N trois entiers. On suppose $C, c, c', N \geq 1$. Pour $m \in M(F)$, $h \in H(F)$, $u, u' \in U(F)$, posons

$$\phi(m,h,u,u';D) = \Xi^H(h)\Xi^G(u'm)\Xi^G(u^{-1}h^{-1}u'm)\kappa_N(m)\sigma(u')^D\sigma(u)^D\sigma(h)^D\sigma(m)^D\delta_P(m)^{-1}.$$

Posons

$$I(c,N,D) = \int_{M(F)}\int_{H(F)U(F)_c}\int_{U(F)}\phi(m,h,u,u';D)du'\,du\,dh\,dm,$$

$$I(c,c',N,D) = \int_{M(F)}\int_{H(F)U(F)_c}\int_{U(F)-U(F)_{c'}}\phi(m,h,u,u';D)du'\,du\,dh\,dm,$$

$$I(c,c',N,C,D) = \int_{M(F)}\int_{H(F)U(F)_c}\int_{U(F)_{c'}}\mathbf{1}_{\sigma\geq C}(hu)\phi(m,h,u,u';D)du'\,du\,dh\,dm.$$

(6) L'intégrale $I(c,N,D)$ est convergente ; les termes c et D étant fixés, il existe un réel R tel que

$$I(c,N,D) << N^R$$

pour tout $N \geq 1$.

(7) L'intégrale $I(c,c',N,D)$ est convergente ; les termes c et D étant fixés, pour tout réel R, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$I(c,c',N,D) << N^{-R}$$

pour tout $N \geq 2$ et tout $c' \geq \alpha log(N)$.

(8) l'intégrale $I(c,c',N,C,D)$ est convergente ; les termes c et D étant fixés, pour tout réel R, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$I(c,c',N,C,D) << N^{-R}$$

pour tout $N \geq 1$, tout $c' \geq 1$ et tout $C \geq \alpha(log(N)+c')$.

4.4 Preuve de la majoration 4.3(1)

Fixons un Lévi minimal M_{min} de G tel que K soit en bonne position relativement à M_{min}. Soit $P_{min} = M_{min}U_{min} \in \mathcal{P}(M_{min})$. On a

$$\int_{G(F)}\mathbf{1}_{\sigma<b}(g)dg = \int_K\int_{U_{min}(F)}\int_{M_{min}(F)}\mathbf{1}_{\sigma<b}(muk)dm\,du\,dk.$$

D'après [W2] lemme II.3.1, il existe $c_1 > 0$ tel que la relation $\sigma(muk) < b$ entraîne $\sigma(m) < c_1 b$, $\sigma(u) < c_1 b$. Alors

$$(1)\qquad \int_{G(F)}\mathbf{1}_{\sigma<b}(g)dg << \int_{U_{min}(F)}\mathbf{1}_{\sigma<c_1b}(u)du\int_{M_{min}(F)}\mathbf{1}_{\sigma<c_1b}(m)dm.$$

Montrons que la première intégrale vérifie la condition requise. On peut fixer des coordonnées $(u_j)_{j\in J}$ sur U_{min} de sorte que $du = \prod_{j\in J}du_j$ et que la condition $\mathbf{1}_{\sigma<c_1b}(u)$ entraîne $val_F(u_j) > -c_2b$ pour tout j, pour une constante $c_2 > 0$ convenable. Or il existe c_3 tel que la mesure de l'ensemble $\{x \in F; val_F > -c_2b\}$ soit bornée par $exp(c_3b)$, d'où le résultat. On doit borner la seconde intégrale de (1), ce qui nous ramène au cas où

$G = M_{min}$. Dans ce cas, $G(F)$ est le produit de $A_G(F)$ et d'un sous-ensemble compact. Cela nous ramène au cas où $G = A_G$ est un tore déployé. On se ramène immédiatement au cas où ce tore est de dimension 1. Alors il existe une constante $c_4 > 0$ telle que notre intégrale soit la mesure de l'ensemble $\{x \in F^\times; |val_F(x)| < c_4 b\}$ (pour la mesure de Haar multiplicative). Cette mesure est essentiellement bornée par b. $\square$

4.5 Majoration d'une intégrale unipotente, cas $r \geq 2$

Supposons $r \geq 1$. Pour tout $i = 1, ..., r$, on note P_i le sous-groupe parabolique des éléments de G qui conservent le drapeau

$$Fv_r \subset Fv_r \oplus Fv_{r-1} \subset ... \subset Fv_r \oplus ... \oplus Fv_i.$$

On note U_i le radical unipotent de P_i et M_i la composante de Lévi qui contient M. Notons $U_{r,\natural}$ le sous-groupe des éléments $u \in U_r$ tels que $u_{r,r-1} = 0$. Pour un réel D, posons

$$I_{r,\natural}(b, D) = \int_{U_{r,\natural}(F)} \mathbf{1}_{\sigma \geq b}(u)\delta_{\bar{P}}(m_{\bar{P}}(u))^{1/2}\Xi^M(m_{\bar{P}}(u))\sigma(u)^D du.$$

Lemme. *Supposons $r \geq 2$. L'intégrale ci-dessus est convergente. Pour D fixé, il existe $\epsilon > 0$ tel que*

$$I_{r,\natural}(b, D) << exp(-\epsilon b)$$

pour tout $b \geq 0$.

Preuve. Notons $V_\flat$ l'orthogonal dans V de l'espace de dimension 4 engendré par v_r, v_{r-1}, v_{1-r} et v_{-r}. Pour $x \in V_\flat$ et $y \in F$, notons $u(x, y)$ l'unique élément de $U_\natural(F)$ tel que $u(x, y)v_{-r} = v_{-r} + x + yv_{r-1} - q_V(x)v_r$. Alors $(x, y) \mapsto u(x, y)$ est un isomorphisme de $V_\flat \times F$ sur $U_\natural(F)$. On pose simplement $u(x) = u(x, 0)$ et $\underline{y} = u(0, y)$. Une description analogue vaut sur le corps de base $\bar{F}$. On note $U_{r,\sharp}$, resp. $\underline{Y}$, le sous-groupe de $U_{r,\natural}$ formé des $u(x)$, resp. $\underline{y}$. On a $U_{r,\natural} = U_{r,\sharp}Y$. Notons $V_\sharp$ l'orthogonal dans V du plan engendré par v_{r-1} et v_{1-r}. Notons $G_\sharp$ le groupe spécial orthogonal de $V_\sharp$ et affectons d'un indice $\sharp$ les intersections avec $G_\sharp$ des groupes que l'on a introduits. En particulier $P_{r,\sharp} = G_\sharp \cap P_r$. On voit que $U_{r,\sharp}$ n'est autre que le radical unipotent de $P_{r,\sharp}$. Soit $x \in V_\flat$, introduisons l'élément $m_{\bar{P}_\sharp}(u(x))$, que l'on écrit $a(x)g_0(x)$, avec $a(x) \in A(F)$, $g_0(x) \in G_0(F)$. On a $a(x)_{r-1} = 1$ puisque $a(x) \in G_\sharp(F)$. Pour tout $v \in V$, notons $val_R(v)$ le plus grand entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $v \in \mathfrak{p}_F^n R$. On a

(1) il existe $c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$ tel que $val_F(a(x)_r) = inf(0, c_1 + val_R(x), c_2 + val_F(q_V(x)))$; il existe $\epsilon_1 > 0$ tel que $|a(x)_r|_F^{-1} << exp(-\epsilon_1\sigma(u(x)))$.

En effet, posons $k = u(x)^{-1}m_{\bar{P}_\sharp}(u(x))u_{\bar{P}_\sharp}(u(x))$. On a $k = k_{\bar{P}_\sharp}(u(x))^{-1} \in K$. Donc $val_R(kv_{-r}) = val_R(v_{-r})$. Mais $kv_{-r} = a(x)_r^{-1}(v_{-r} - x - q_V(x)v_r)$, d'où

$$val_R(kv_{-r}) = -val_F(a(x)) + val_R(v_{-r} - x - q_V(x)v_r).$$

D'après la définition de R, on a

$$val_R(v_{-r} - x - q_V(x)v_r) = inf(val_R(v_{-r}), val_R(x), val_F(q_V(x) + val_R(v_r)).$$

En utilisant toutes ces égalités, on obtient

$$val_F(a(x)_r) = inf(0, -val_R(v_{-r}) + val_R(x), val_R(v_r) - val_R(v_{-r}) + val_F(q_V(x))).$$

D'où la première assertion de (1). La seconde s'en déduit immédiatement.

On a l'égalité $m_{\bar{P}}(u(x)) = m_{\bar{P}_\sharp}(u(x))$. On calcule

$$\delta_{\bar{P}}(m_{\bar{P}}(u(x)))^{1/2}\Xi^M(m_{\bar{P}}(u(x))) = \Xi^{G_0}(g_0(x)) \prod_{i=1,\dots,r} |a(x)_i|_F^{1-i-d_{V_0}/2},$$

$$\delta_{\bar{P}_\sharp}(m_{\bar{P}_\sharp}(u(x)))^{1/2}\Xi^{M_\sharp}(m_{\bar{P}_\sharp}(u(x))) = \Xi^{G_0}(g_0(x))|a(x)_r|_F^{2-r-d_{V_0}/2} \prod_{i=1,\dots,r-2} |a(x)_i|_F^{1-i-d_{V_0}/2},$$

d'où

$$(2) \qquad \delta_{\bar{P}}(m_{\bar{P}}(u(x)))^{1/2}\Xi^M(m_{\bar{P}}(u(x))) = |a(x)_r|_F^{-1}\delta_{\bar{P}_\sharp}(m_{\bar{P}_\sharp}(u(x)))^{1/2}\Xi^{M_\sharp}(m_{\bar{P}_\sharp}(u(x))).$$

Soient $x \in V_\flat$ et $y \in F$. On a

$$m_{\bar{P}}(u(x)\underline{y}) = m_{\bar{P}}(u(x))m_{\bar{P}}(k_{\bar{P}}(u(x)\underline{y}).$$

Il existe donc $R_1 > 0$ tel que

$$(3) \qquad \delta_{\bar{P}}(m_{\bar{P}}(u(x)\underline{y}))^{1/2}\Xi^M(m_{\bar{P}}(u(x)\underline{y})) << \delta_{\bar{P}}(m_{\bar{P}}(u(x)))^{1/2}\Xi^M(m_{\bar{P}}(u(x))exp(R_1\sigma(y)),$$

où $\sigma(y) = sup(1, -val_F(y))$. Introduisons un réel $\mu > 0$ que nous fixerons plus tard et posons

$$I^1_{r,\natural}(b, D) = \int_{y\in F; val_F(y)\geq -\mu b} \int_{V_\flat} \mathbf{1}_{\sigma\geq b}(u(x)\underline{y})\delta_{\bar{P}}(m_{\bar{P}}(u(x)\underline{y}))^{1/2}$$
$$\Xi^M(m_{\bar{P}}(u(x)\underline{y}))\sigma(u(x)\underline{y})^D dx\, dy.$$

Pour y tel que $val_F(y) \geq -\mu b$, on a $|\sigma(u(x)\underline{y}) - \sigma(u(x))| << \mu b$. Si μ est assez petit, la condition $\mathbf{1}_{\sigma\geq b}(u(x)\underline{y}) = 1$ entraîne $\mathbf{1}_{\sigma\geq b/2}(u(x)) = 1$. Grâce à (3), on obtient

$$I^1_{r,\natural}(b, D) << \int_{V_\flat} \mathbf{1}_{\sigma\geq b/2}(u(x))\delta_{\bar{P}}(m_{\bar{P}}(u(x)))^{1/2}\Xi^M(m_{\bar{P}}(u(x)))\sigma(u(x))^D dx$$

$$\int_{y\in F; val_F(y)\geq -\mu b} (\mu b)^D exp(R_1\sigma(y))dy.$$

Il existe R_2 tel la dernière intégrale soit bornée par $exp(R_2\mu b)$. Dans la première intégrale, on utilise (1) et (2). Pour $\mathbf{1}_{\sigma\geq b/2}(u(x)) = 1$, on a

$$\delta_{\bar{P}}(m_{\bar{P}}(u(x)))^{1/2}\Xi^M(m_{\bar{P}}(u(x)) <<$$

$$exp(-\epsilon_1 b/4 - \epsilon_1\sigma(u(x))/2)\delta_{\bar{P}}(m_{\bar{P}_\sharp}(u(x)))^{1/2}\Xi^{M_\sharp}(m_{\bar{P}_\sharp}(u(x))).$$

Alors

$$I^1_{r,\natural}(b, D) << exp(R_2\mu b - \epsilon_1 b/4) \int_{V_\flat} exp(-\epsilon_1\sigma(u(x))/2)\delta_{\bar{P}}(m_{\bar{P}_\sharp}(u(x)))^{1/2}$$

$$\Xi^{M_\sharp}(m_{\bar{P}_\sharp}(u(x)))\sigma(u(x))^D dx.$$

D'après [W2] lemme II.4.3, cette intégrale est convergente. Choisissons μ tel que $\epsilon_1/4 - R_2\mu > 0$ et notons ϵ_2 ce dernier terme. On obtient alors

$$I^1_{r,\natural}(b,D) << exp(-\epsilon_2 b).$$

Le réel μ étant maintenant fixé, posons

$$I^2_{r,\natural}(b,D) = \int_{y\in F; val_F(y)<-\mu b}\int_{V_\flat} \mathbf{1}_{\sigma\geq b}(u(x)\underline{y})\delta_{\bar{P}}(m_{\bar{P}}(u(x)\underline{y}))^{1/2}$$
$$\Xi^M(m_{\bar{P}}(u(x)\underline{y}))\sigma(u(x)\underline{y})^D dx\, dy.$$

Il nous reste à majorer cette expression. Soit $y \in F$ tel que $val_F(y) < \mu b$. Le groupe Y est en fait le sous-groupe unipotent U_2 du groupe GL_2 agissant dans le plan engendré par v_{r-1} et v_{-r}. Dans GL_2, on a l'égalité habituelle

$$(4) \qquad \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y^{-1} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit une égalité $\underline{y} = a(y)\bar{n}(y)k(y)$ où

$a(y)$ est l'élément de $A(F)$ tel que $a(y)_r = a(y)_{r-1} = y$ et $a(y)_i = 1$ pour $i = 1,...,r-2$;

$\bar{n}(y)$ est l'élément de $U_{\bar{P}}(F)$ qui envoie v_r sur $v_r - yv_{1-r}$, v_{r-1} sur $v_{r-1} + yv_{-r}$ et fixe les autres vecteurs $v_{\pm i}$ ainsi que V_0 ;

$k(y)$ est un élément qui reste borné.

Soit $x \in V_\flat$. On a $u(x)a(y) = a(y)u(y^{-1}x)$. Posons $x' = y^{-1}x$. Un calcul matriciel montre que $u(x')\bar{n}(y)u(x')^{-1} = \bar{n}(x',y)n(x',y)$, où $\bar{n}(x',y) \in U_{\bar{P}}(F)$ et $n(x',y)$ est l'élément de $U_P(F)$ qui envoie v_{r-1} sur $v_{r-1} - yq_V(x')v_r$, v_{-r} sur $v_{-r} + yq_V(x')v_{1-r}$ et qui fixe les autres $v_{\pm i}$ ainsi que V_0. D'où

$$u(x)\underline{y} = a(y)\bar{n}(x',y)n(x',y)u(x')k(y)$$

$$= a(y)\bar{n}(x',y)n(x',y)a(x')g_0(x')u_{\bar{P}_\sharp}(u(x'))k_{\bar{P}_\sharp}(u(x'))k(y).$$

Posons $n'(x',y) = a(x')^{-1}n(x',y)a(x')$. C'est l'élément de $U_P(F)$ qui envoie v_{r-1} sur $v_{r-1} - ya(x')_r^{-1}q_V(x')v_r$, v_{-r} sur $v_{-r} + ya(x')_r^{-1}q_V(x')v_{1-r}$ et qui fixe les autres $v_{\pm i}$ ainsi que V_0. Cet élément $n'(x',y)$ appartient au sous-groupe unipotent U_2 du groupe GL_2 agissant dans le plan engendré par v_{1-r} et v_{-r}. En utilisant (4), on a $n'(x',y) = a(x',y)\bar{n}'(x',y)k(x',y)$ où $\bar{n}'(x',y) \in U_{\bar{P}}(F)$, $k(x',y)$ reste borné et $a(x',y)$ est l'élément de $A(F)$ tel que

- si $val_F(q_V(x')) + val_F(y) - val_F(a(x')_r) \geq 0$, $a(x',y) = 1$;

- si $val_F(q_V(x')) + val_F(y) - val_F(a(x')_r) < 0$, $a(x',y)_r = a(x')_r^{-1}yq_V(x)$, $a(x',y)_{r-1} = a(x')_r y^{-1}q_V(x')^{-1}$, et $a(x',y)_i = 1$ pour tout $i = 1,...,r-2$.

D'où

$$u(x)\underline{y} = a(y)\bar{n}(x',y)a(x')a(x',y)\bar{n}'(x',y)k(x',y)g_0(x')u_{\bar{P}_\sharp}(u(x'))k_{\bar{P}_\sharp}(u(x'))k(y).$$

L'élément $k(x',y)$ appartient au même groupe GL_2 que ci-dessus. Ce groupe commute à G_0. Il conserve le radical unipotent du sous-groupe parabolique de G formé des éléments qui conservent le drapeau

$$Fv_{-r} \oplus Fv_{1-r} \subset Fv_{-r} \oplus Fv_{1-r} \oplus Fv_{2-r} \subset ... \subset Fv_{-r} \oplus ... \oplus Fv_{-1}.$$

Ce radical unipotent est contenu dans $U_{\bar{P}}$ et contient $U_{\bar{P}_\sharp}$. Donc $k(x',y)u_{\bar{P}_\sharp}(u(x'))k(x',y)^{-1}\in U_{\bar{P}}(F)$. Finalement

$$u(x)\underline{y}\in U_{\bar{P}}(F)a(y)a(x')a(x',y)g_0(x')\Gamma,$$

où Γ est un ensemble borné. On en déduit, grâce à (2)

$$\delta_{\bar{P}}(m_{\bar{P}}(u(x)\underline{y}))^{1/2}\Xi^M(m_{\bar{P}}(u(x)\underline{y}))<<\delta_{\bar{P}}(a(y)a(x',y))^{1/2}\delta_{\bar{P}}(m_{\bar{P}}(u(x')))^{1/2}\Xi^M(m_{\bar{P}}(u(x')))$$

$$<<\delta_{\bar{P}}(a(y)a(x',y))^{1/2}|a(x')_r|_F^{-1}\delta_{\bar{P}_\sharp}(m_{\bar{P}_\sharp}(u(x')))^{1/2}\Xi^{M_\sharp}(m_{\bar{P}_\sharp}(u(x'))).$$

On calcule

$$\delta_{\bar{P}}(a(y))^{1/2}=|y|_F^{3-d_V},$$
$$\delta_{\bar{P}}(a(x',y))^{1/2}=|a(x',y)_{r-1}|_F.$$

Dans l'intégrale $I^2_{r,\natural}(b,D)$, effectuons le changement de variable $x\mapsto yx$, autrement dit $x'\mapsto x$. Cela remplace dx par $|y|_F^{d_V-4}dx$. En majorant la fonction $\mathbf{1}_{\sigma\geq b}(u(x)\underline{y})$ par 1, on obtient

$$(5)\qquad I^2_{r,\natural}(b,D)<<\int_{y\in F;val_F(y)<-\mu b}\int_{V_\flat}|a(x)_r|^{-1}\delta_{\bar{P}_\sharp}(m_{\bar{P}_\sharp}(u(x)))^{1/2}$$

$$\Xi^{M_\sharp}(m_{\bar{P}_\sharp}(u(x)))|a(x,y)_{r-1}|_F\sigma(y)^D\sigma(u(x))^D|y|_F^{-1}dx\,dy.$$

Posons $R_\flat=R\cap V_\flat$ et notons $R_\flat^\vee$ son dual, c'est-à-dire $R_\flat^\vee=\{v\in V_\flat;\forall v'\in R_\flat,q_V(v,v')\in\mathfrak{o}_F\}$. Décomposons le membre de droite de (5) en deux intégrales, $I^3_{r,\natural}(b,D)+I^4_{r,\natural}(b,D)$, où, dans $I^3_{r,\natural}(b,D)$, resp. $I^4_{r,\natural}(b,D)$, on restreint l'intégration aux $x\in\mathfrak{p}_F^{-c_1}R_\flat$, resp. $x\notin\mathfrak{p}_F^{-c_1}R_\flat$. On doit démontrer que chacune des deux intégrales vérifie la majoration de l'énoncé.

Dans $I^3_{r,\natural}(b,D)$, $u(x)$ reste dans un compact et tous les termes dépendant de x sont bornés. D'où

$$I^3_{r,\natural}(b,D)<<\int_{y\in F;val_F(y)<-\mu b}X(y)\sigma(y)^D|y|_F^{-1}dy,$$

où

$$X(y)=\int_{\mathfrak{p}_F^{-c_1}R_\flat}|a(x,y)_{r-1}|_Fdx.$$

Il existe $c_3>0$ tel que $|val_F(a(x)_r)|\leq c_3$ pour tout $x\in\mathfrak{p}_F^{-c_1}R_\flat$. On a alors

$$|a(x,y)_{r-1}|_F\leq\begin{cases}1, & \text{si } val_F(q_V(x))+val_F(y)\geq -c_3,\\ q^{c_3}|yq_V(x)|_F^{-1}, & \text{si } val_F(q_V(x))+val_F(y)<-c_3.\end{cases}$$

Pour tout entier $k\in\mathbb{Z}$, notons $m(k)$ la mesure de l'ensemble des $x\in\mathfrak{p}_F^{-c_1}R_\flat$ tels que $val_F(q_V(x))=k$. Certainement, cette valuation est bornée inférieurement, donc il existe c_4 tel que $m(k)=0$ si $k<c_4$. On obtient

$$X(y)<<\sum_{k;c_4\leq k<-c_3-val_F(y)}m(k)|y|_F^{-1}q^k+\sum_{-c_3-val_F(y)\leq k}m(k).$$

On vérifie que l'on a une majoration $m(k)<<q^{-k/2}$. Alors

$$X(y)<<|y|_F^{-1/2}\sigma(y).$$

En reportant cette majoration dans $I^3_{r,\natural}(b,D)$, on obtient

$$I^3_{r,\natural}(b,D) << \int_{y\in F; val_F(y)<-\mu b} \sigma(y)^{D+1}|y|_F^{-3/2}dy.$$

Mais il existe $\epsilon_3>0$ tel que cette intégrale soit bornée par $exp(-\epsilon_3 b)$. C'est ce qu'on voulait.

Traitons maintenant l'intégrale $I^4_{r,\natural}(b,D)$. Choisissons un entier c_4 tel que

(6)(i) $\mathfrak{p}_F^{c_4}R_\flat^\vee \subset \mathfrak{p}_F^{-c_1}R_\flat$;

(6)(ii) $val_F(q_V(v))\geq sup(0,-c_1+c_4)$ pour tout $v\in \mathfrak{p}_F^{c_4}R_\flat^\vee$;

(6)(iii) $u(v)\in K$ pour tout $v\in\mathfrak{p}_F^{c_4}R_\flat^\vee$;

(6)(iv) $c_4+c_2-c_1>0$.

Pour $y\in F$ tel que $val_F(y)<-\mu b$, posons $n(y)=c_4+[\frac{-val_F(y)}{2}]$. D'après (6)(i), l'ensemble $V_\flat-\mathfrak{p}_F^{-c_1}R_\flat$ est stable par translation par $\mathfrak{p}_F^{n(y)}R_\flat^\vee$. Dans l'intégrale intérieure de $I^4_{r,\natural}(b,D)$, on peut remplacer x par $x+v$, avec $v\in\mathfrak{p}_F^{n(y)}R_\flat^\vee$, puis intégrer sur v, tout en divisant par $mes(\mathfrak{p}_F^{n(y)}R_\flat^\vee)$. On a $u(x+v)=u(x)u(v)$ et $u(v)\in K$ d'après (6)(iii). Donc $\sigma(u(x+v))=\sigma(u(x))$, $m_{\bar{P}_\sharp}(u(x+v))=m_{\bar{P}_\sharp}(u(x))$ et $a(x+v)=a(x)$. On obtient

$$I^4_{r,\natural}(b,D)=\int_{y\in F;val_F(y)<-\mu b}\int_{V_\flat-\mathfrak{p}_F^{-c_1}R_\flat}|a(x)_r|^{-1}\delta_{\bar{P}_\sharp}(m_{\bar{P}_\sharp}(u(x)))^{1/2}\Xi^{M_\sharp}(m_{\bar{P}_\sharp}(u(x)))\alpha(x,y)$$

$$\sigma(y)^D\sigma(u(x))^D|y|_F^{-1}dx\,dy,$$

où

$$\alpha(x,y)=mes(\mathfrak{p}_F^{n(y)}R_\flat^\vee)^{-1}\int_{\mathfrak{p}_F^{n(y)}R_\flat^\vee}|a(x+v,y)_{r-1}|_F dv.$$

Fixons x,y intervenant dans l'intégrale ci-dessus. Montrons que

(7) on a $\alpha(x,y)<<|y|_F^{-1/2}\sigma(y)$.

On a $val_R(x)<-c_1$ donc, d'après (1)

$$val_F(a(x)_r)=inf(val_R(x)+c_1,val_F(q_V(x))+c_2)<0.$$

Pour $v\in\mathfrak{p}_F^{n(y)}R_\flat^\vee$, on a $a(x+v)=a(x)$ comme on vient de le dire et la valeur de $a(x+v,y)_{r-1}$ est fonction de $val_F(q_V(x+v))+val_F(y)-val_F(a(x)_r)$. Notons $N(v)$ cet entier. On a $q_V(x+v)=q_V(x)+q_V(x,v)+q_V(v)$ et $val_F(q_V(x,v))\geq val_R(x)+n(y)$. Supposons d'abord $val_F(q_V(x))<val_R(x)+n(y)$. Grâce à (6)(ii), on a

$$val_R(x)+n(y)<-c_1+c_4+[\frac{-val_F(y)}{2}]\leq -c_1+c_4+2[\frac{-val_F(y)}{2}]\leq val_F(q_V(v)).$$

Donc $val_F(q_V(x+v))=val_F(q_V(x))$. Si $val_F(a(x)_r)=val_F(q_V(x))+c_2$, alors $N(v)=val_F(y)-c_2\leq -c_2$. D'après la définition de $a(x+v,y)_{r-1}$, on a

$$|a(x+v)_{r-1}|_F\leq q^{N(v)}<<|y|_F^{-1},$$

et $\alpha(x,y)<<|y|_F^{-1}$. Si $val_F(a(x)_r)=val_R(x)+c_1$, on a

$$N(v)<val_R(x)+n(y)+val_F(y)-val_F(a(x)_r)=n(y)+val_F(y)-c_1\leq c_4-c_2+val_F(y)/2,$$

d'où $|a(x+v)_{r-1}|_F\leq q^{N(v)}<<|y|_F^{-1/2}$, puis $\alpha(x,y)<<|y|_F^{-1/2}$. Supposons maintenant $val_F(q_V(x))\geq val_R(x)+n(y)$. Grâce à (6)(iv), $val_F(q_V(x))+c_2>val_R(x)+c_1$, donc

$val_F(a(x)_r) = val_R(x) + c_1$. Choisissons une base $(x_j)_{j=1,...,m}$ de $R_\flat$ sur $\mathfrak{o}_F$ de sorte que $x = \varpi_F^{val_R(x)} x_1$. Introduisons la base duale $(x_j^\vee)_{j=1,...,m}$ de $R_\flat^\vee$. Introduisons des coordonnées sur $\mathfrak{p}_F^{n(y)} R^\vee$ en posant $v = \varpi_F^{n(y)}((z_1 - \varpi_F^{-val_R(x)-n(y)} q_V(x))x_1^\vee + \sum_{j=2,...,m} z_j x_j^\vee)$. Les z_j parcourent $\mathfrak{o}_F$. On peut supposer $dv = \prod_{j=1,...,m} dz_j$ et alors $mes(\mathfrak{p}_F^{n(y)} R_\flat^\vee)$ est indépendant de y. On a $q_V(x) + q_V(x,v) = \varpi_F^{val_R(x)+n(y)} z_1$. On a

$$val_F(q_V(x) + q_V(x,v)) + val_F(y) - val_F(a(x)_r) = val_F(z_1) - n'(y),$$

où $n'(y) = c_1 - val_F(y) - n(y) = c_1 - c_4 + [\frac{1-val_F(y)}{2}]$. Remarquons que, grâce à (6)(ii), on a

$$val_F(q_V(v)) + val_F(y) - val_F(a(x)_r) \geq 2[\frac{-val_F(y)}{2}] + val_F(y) + 1 \geq 0.$$

Si $val_F(z_1) < n'(y)$, alors $N(v) = val_F(z_1) - n'(y)$ et $|a(x+v)_{r-1}|_F = q^{-n'(y)}|z_1|_F^{-1}$. Si $val_F(z_1) \geq n'(y)$, alors $N(v) \geq 0$ et $|a(x+v)_{r-1}|_F = 1$. D'où

$$\alpha(x,y) << \int_{z_1 \in \mathfrak{o}_F; val_F(z_1) < n'(y)} q^{-n'(y)} |z_1|_F^{-1} dz_1 + \int_{z_1 \in \mathfrak{o}_F; val_F(z_1) \geq n'(y)} dz_1.$$

On voit que $\alpha(x,y) << (1 + |n'(y)|) q^{-n'(y)} << \sigma(y)|y|^{-1/2}$. On a obtenu la majoration (7) dans tous les cas.

Alors

$$I^4_{r,\natural}(b,D) << \int_{y \in F; val_F(y) < -\mu b} \sigma(y)^{D+1} |y|_F^{-3/2} dy$$

$$\int_{V_\flat} |a(x)_r|^{-1} \delta_{\bar{P}_\sharp}(m_{\bar{P}_\sharp}(u(x)))^{1/2} \Xi^{M_\sharp}(m_{\bar{P}_\sharp}(u(x))) \sigma(u(x))^D dx.$$

Il existe $\epsilon_4 > 0$ tel que la première intégrale soit majorée par $exp(-\epsilon_4 b)$. Lorsque l'on a traité l'intégrale $I^1_{r,\natural}(b,D)$, on a montré que la seconde intégrale était convergente. D'où la majoration cherchée pour l'intégrale $I^4_{r,\natural}(b,D)$, ce qui achève la preuve. □

4.6 Majoration d'une intégrale unipotente, cas $r = 1$

Lemme. *Supposons $r = 1$. L'intégrale définissant $I_{1,\natural}(b,D)$ est convergente et, D étant fixé, il existe $\epsilon > 0$ tel que*

$$I_{1,\natural}(b,D) << exp(-\epsilon b)$$

pour tout $b \geq 0$.

Preuve. Puisque $r = 1$, on a $P_1 = P$. Notons $V_\sharp$ le sous-espace de V orthogonal à la droite D_0 portée par v_0. Avec les mêmes notations que dans le paragraphe précédent, on a $U_{1,\natural} = U_\sharp$. Fixons un sous-groupe compact spécial $K_\sharp$ de $G_\sharp(F)$, en bonne position relativement à $M_\sharp$. Il n'est pas forcément inclus dans K. Pour $u \in U_{1,\natural}(F)$, on a $u = m_{\bar{P}_\sharp}(u) u_{\bar{P}_\sharp}(u) k_{\bar{P}_\sharp}(u)$ et on en déduit que $m_{\bar{P}}(u) m_{\bar{P}_\sharp}(u)^{-1}$ reste dans un compact. Ecrivons $m_{\bar{P}_\sharp}(u) = a(u) g_0(u)$, avec $a(u) \in A(F)$ et $g_0(u) \in G_0(F)$. Comme dans le paragraphe précédent, on voit qu'il existe $\epsilon_1 > 0$ tel que $|a(u)_1|_F^{-1} << exp(-\epsilon_1\sigma(u))$ et que l'on a l'égalité

$$\delta_{\bar{P}}(m_{\bar{P}}(u))^{1/2}\Xi^M(m_{\bar{P}}(u)) << |a(u)_1|_F^{-1/2}\delta_{\bar{P}_\sharp}(m_{\bar{P}_\sharp}(u))^{1/2}\Xi^{M_\sharp}(m_{\bar{P}_\sharp}(u)).$$

Alors

$$I_{1,\natural}(b,D) << exp(-\epsilon_1 b/4)\int_{U_\sharp(F)}\delta_{\bar{P}_\sharp}(m_{\bar{P}_\sharp}(u))^{1/2}\Xi^{M_\sharp}(m_{\bar{P}_\sharp}(u))exp(-\epsilon_1\sigma(u)/4)\sigma(u)^D du.$$

L'intégrale est convergente d'après le lemme II.4.3 de [W2]. D'où le résultat. □

4.7 Preuve de 4.3(3)

Si $r=0$, $U=\{1\}$ et l'assertion 4.3(3) est évidente. Supposons $r\geq 1$. On a introduit le sous-groupe parabolique $P_r = M_rU_r$ en 4.5. Pour $x\in M_r(F)$, posons

$$X_r(c,D,x) = \int_{U_r(F)\cap U(F)_c}\Xi^G(ux)\sigma(ux)^D du.$$

On va montrer que

(1) cette intégrale est convergente ; le réel D étant fixé, il existe un réel D' tel que

$$X_r(c,D,x) << c^{D'}\sigma(x)^{D'}\delta_{P_r}(x)^{1/2}\Xi^{M_r}(x)$$

pour tous c,x.

Auparavant, montrons que cette assertion entraîne 4.3(3). On a

$$X(c,D,m) = \int_{M_r(F)\cap U(F)_c}\int_{U_r(F)\cap U(F)_c}\Xi^G(uvm)\sigma(uvm)^D du\, dv$$

$$= \int_{M_r(F)\cap U(F)_c} X_r(c,D,vm)dv.$$

Grâce à (1), on a

$$X(c,D,m) << c^{D'}\int_{U_r(F)\cap U(F)_c}\delta_{P_r}(vm)^{1/2}\Xi^{M_r}(vm)\sigma(vm)^{D'}dv.$$

On a $\delta_{P_r}(vm)=\delta_{P_r}(m)$ pour tout v. On a $M_r = GL_1\times\tilde{G}$, où $\tilde{G}$ est le groupe spécial orthogonal de l'orthogonal dans V du plan engendré par v_r et v_{-r}. On a $M_r\cap U = \tilde{G}\cap U$. Ecrivons $m=(a,\tilde{m})$, avec $a\in GL_1(F)$, $\tilde{m}\in\tilde{G}(F)$. Alors $\Xi^{M_r}(vm) = \Xi^{\tilde{G}}(v\tilde{m})$. D'où

$$X(c,D,m) << c^{D'}\sigma(a)^{D'}\delta_{P_r}(m)^{1/2}\int_{\tilde{G}(F)\cap U(F)_c}\Xi^{\tilde{G}}(v\tilde{m})\sigma(v\tilde{m})^{D'}dv.$$

Mais cette intégrale est analogue à celle de départ : on a remplacé G par $\tilde{G}$, D par D' et m par $\tilde{m}$. En passant de G à $\tilde{G}$, on remplace r par $r-1$. En raisonnant par récurrence sur r, on peut supposer qu'il existe R' tel que l'intégrale soit essentiellement majorée par $c^{R'}\sigma(\tilde{m})^{R'}\delta_{P\cap\tilde{G}}(\tilde{m})^{1/2}\Xi^M(\tilde{m})$. Alors

$$X(c,D,m) << c^{D'+R'}\sigma(a)^{D'}\sigma(\tilde{m})^{R'}\delta_{P_r}(m)^{1/2}\delta_{P\cap\tilde{G}}(\tilde{m})^{1/2}\Xi^M(\tilde{m}).$$

Mais $\delta_{P_r}(m)\delta_{P\cap\tilde{G}}(\tilde{m}) = \delta_P(m)$ et $\Xi^M(\tilde{m}) = \Xi^M(m)$, d'où la majoration cherchée.

La preuve de (1) est analogue à celle du lemme 3.3. Introduisons un réel $b > 0$ que nous préciserons par la suite. On décompose $X_r(c, D, x)$ en $X_{r,<b}(c, D, x)+X_{r,\geq b}(c, D, x)$, où

$$X_{r,<b}(c, D, x) = \int_{U_r(F)\cap U(F)_c} \mathbf{1}_{\sigma<b}(ux)\Xi^G(ux)\sigma(ux)^D du,$$

$$X_{r,\geq b}(c, D, x) = \int_{U_r(F)\cap U(F)_c} \mathbf{1}_{\sigma\geq b}(ux)\Xi^G(ux)\sigma(ux)^D du.$$

Dans la première, on a $\sigma(ux) < b$, donc

$$X_{r,<b}(c, D, x) << b^{D'} \int_{U_r(F)} \Xi^G(ux)\sigma(ux)^{D-D'} du$$

pour tout réel $D' > 0$. D'après [W2] proposition II.4.5, si D' est assez grand, cette intégrale est convergente et essentiellement bornée par $\delta_{P_r}(x)^{1/2}\Xi^{M_r}(x)$. Pour un tel D', on a donc

$$(2) \qquad X_{r,<b}(c, D, x) << b^{D'}\delta_{P_r}(x)^{1/2}\Xi^{M_r}(x).$$

Introduisons le "sous-groupe radiciel" évident $U_{r,r-1}$ de U_r. On a la décomposition $U_r = U_{r,\natural}U_{r,r-1}$, avec la notation de 4.5 et $U_r(F) \cap U(F)_c = U_{r,\natural}(F)U_{r,r-1}(F)_c$, où $U_{r,r-1}(F)_c = U_{r,r-1}(F) \cap U(F)_c$. D'où

$$X_{r,\geq b}(c, D, x) = \int_{U_{r,r-1}(F)_c} \int_{U_{r,\natural}(F)} \mathbf{1}_{\sigma\geq b}(uv)\Xi^G(uvx)\sigma(uvx)^D du\, dv.$$

Il existe $c_1 > 0$ tel que $\sigma(v) < c_1c$ pour tout $v \in U_{r,r-1}(F)_c$. Si $b > 2c_1c$, la condition $\sigma(uv) \geq b$ entraîne $\sigma(u) \geq b/2$. On suppose $b > 2c_1c$. On a encore la majoration 3.3(5), d'où, comme en 3.3,

$$X_{r,\geq b}(c, D, x) << exp(\alpha c_1c + \alpha\sigma(x)) \int_{U_{r,\natural}(F)} \mathbf{1}_{\sigma\geq b/2}\Xi^G(u)\sigma(u)^D du,$$

pour un $\alpha > 0$ convenable. D'après [W2], lemmes II.1.1 et II.3.2, il existe un réel D'' tel que

$$\Xi^G(g) << \delta_{\bar{P}}(m_{\bar{P}}(g))^{1/2}\Xi^M(m_{\bar{P}}(g))\sigma(g)^{D''}$$

pour tout $g \in G(F)$. Alors l'intégrale ci-dessus est bornée par l'intégrale $I_{r,\natural}(b/2, D+D'')$ de 4.5. En utilisant les lemmes 4.5 ou 4.6 selon la valeur de r, elle est essentiellement bornée par $exp(-\epsilon b)$ pour un $\epsilon > 0$ convenable. Enfin, on vérifie qu'il existe $c_2 > 0$ tel que l'on ait la majoration

$$exp(-c_2\sigma(x)) << \delta_{P_r}(x)^{1/2}\Xi^{M_r}(x).$$

Alors

$$X_{r,\geq b}(c, D, x) << exp(\alpha c_1c + (\alpha + c_2)\sigma(x) - \epsilon b)\delta_{P_r}(x)^{1/2}\Xi^{M_r}(x).$$

On choisit maintenant $b = 2c_1c + \epsilon^{-1}\alpha c_1c + \epsilon^{-1}(\alpha + c_2)\sigma(x)$. Alors

$$X_{r,\geq b}(c, D, x) << \delta_{P_r}(x)^{1/2}\Xi^{M_r}(x).$$

Cette majoration et (2) entraînent (1). $\square$

4.8 Majoration d'intégrales doubles sur $U(F)$

Soient D un réel, c et c' deux entiers. Supposons $c' \geq c > 0$. Remarquons que l'ensemble $U(F) - U(F)_{c'}$ est invariant par translation par $U(F)_c$. Pour $m, m' \in M(F)$, posons

$$X(c, D, m, m') = \int_{U(F)/U(F)_c} \int_{U(F)_c} \int_{U(F)_c} \Xi^G(uvm)\Xi^G(uv'm')\sigma(uvm)^D\sigma(uv'm')^D dv'\, dv\, du,$$

$$X(c, c', D, m, m') = \int_{(U(F)-U(F)_{c'})/U(F)_c} \int_{U(F)_c} \int_{U(F)_c} \Xi^G(uvm)$$
$$\Xi^G(uv'm')\sigma(uvm)^D\sigma(uv'm')^D dv'\, dv\, du,$$

$$X(D, m, m') = \int_{U(F)} \Xi^G(um)\Xi^G(um')\sigma(um)^D\sigma(um')^D du.$$

Lemme. *(i) Ces intégrales sont convergentes.*

(ii) Le réel D étant fixé, il existe un réel R tel que

$$X(c, D, m, m') << c^R\sigma(m)^R\delta_P(m)^{1/2}\Xi^M(m)\sigma(m')^R\delta_P(m')^{1/2}\Xi^M(m')$$

pour tous $m, m' \in M(F)$ et tout $c \geq 1$.

(iii) Les termes c et D étant fixés, il existe un réel R et un réel $\epsilon > 0$ tels que

$$X(c, c', D, m, m') << exp(-\epsilon c')\sigma(m)^R\delta_P(m)^{1/2}\Xi^M(m)\sigma(m')^R\delta_P(m')^{1/2}\Xi^M(m')$$

pour tous $m, m' \in M(F)$ et tout $c' \geq c$.

(iv) Le réel D étant fixé, il existe un réel R tel que

$$X(D, m, m') << \sigma(m)^R\delta_P(m)^{1/2}\Xi^M(m)\sigma(m')^R\delta_P(m')^{1/2}\Xi^M(m')$$

pour tous $m, m' \in M(F)$.

Preuve. L'application

$$\begin{array}{ccc} U(F)/U(F)_c & \to & (F/\mathfrak{p}_F^{-c})^r \\ u & \mapsto & (u_{r,r-1} + \mathfrak{p}_F^{-c}, ..., u_{1,0} + \mathfrak{p}_F^{-c}) \end{array}$$

est un isomorphisme. Définissons une fonction val_F^c sur F par $val_F^c(x) = 0$ si $x \in \mathfrak{p}_F^{-c}$, $val_F^c(x) = val_F(x) + c$ si $x \notin \mathfrak{p}_F^{-c}$. Elle se quotiente en une fonction sur $F/\mathfrak{p}_F^{-c}$. Pour $u \in U(F)/U(F)_c$, posons $val_F^c(u) = \sum_{i=1,\dots,r} val_F^c(u_{i,i-1})$. Montrons que :

(1) il existe un réel D_1 tel que l'on ait une majoration

$$\int_{U(F)_c} \Xi^G(uvm)\sigma(uvm)^D dv << (c - val_F^c(u))^{D_1} q^{val_F^c(u)}\sigma(m)^{D_1}\delta_P(m)^{1/2}\Xi^M(m)$$

pour tout $m \in M(F)$, tout $c \geq 1$ et tout $u \in U(F)/U(F)_c$.

Soit $a \in A(F)\cap K$. On peut remplacer $\Xi^G(uvm)\sigma(uvm)^D$ par $\Xi^G(auvma^{-1})\sigma(auvma^{-1})^D$. On peut ensuite intégrer en a. Puisque a commute à m et normalise $U(F)_c$, on obtient

$$\int_{U(F)_c} \Xi^G(uvm)\sigma(uvm)^D dv << \int_{A(F)\cap K} \int_{U(F)_c} \Xi^G(aua^{-1}vm)\sigma(aua^{-1}vm)^D dv\, da.$$

Considérons l'application

$$\begin{array}{ccc} A(F)\cap K & \to & U(F)/U(F)_c \\ a & \mapsto & aua^{-1}U(F)_c. \end{array}$$

On vérifie que son jacobien est borné par $q^{val_F^c(u)}$. Son image est contenue dans $U(F)_{-val_F^c(u)+c}/U(F)_c$. D'où

$$\int_{U(F)_c}\Xi^G(uvm)\sigma(uvm)^D dv << q^{val_F^c(u)}\int_{U(F)_{-val_F^c(u)+c}/U(F)_c}\int_{U(F)_c}\Xi^G(uvm)\sigma(uvm)^D dv\, du$$

$$<< q^{val_F^c(u)}\int_{U(F)_{-val_F^c(u)+c}}\Xi^G(vm)\sigma(vm)^D dv.$$

Il reste à faire appel à 4.3(3) pour obtenir l'assertion (1).

Grâce à (1), on a

$$X(c,D,m,m') << \sigma(m)^{D_1}\delta_P(m)^{1/2}\Xi^M(m)\sigma(m')^{D_1}\delta_P(m')\Xi^M(m')$$
$$\int_{U(F)/U(F)_c}(c-val_F^c(u))^{2D_1}q^{2val_F^c(u)}du.$$

Cette dernière intégrale est produit d'intégrales du type

$$(2)\qquad \int_{F/\mathfrak{p}_F^{-c}}(c-val_F^c(x))^{2D_1}q^{2val_F^c(x)}dx.$$

On vérifie qu'il existe un réel D_2 tel que cette expression soit essentiellement bornée par c^{D_2}. On en déduit une majoration similaire pour l'intégrale intervenant dans la formule ci-dessus. Alors $X(c,D,m,m')$ vérifie la majoration du (ii) de l'énoncé.

Grâce à (1), on a

$$X(c,D,m,m') << \sigma(m)^{D_1}\delta_P(m)^{1/2}\Xi^M(m)\sigma(m')^{D_1}\delta_P(m')\Xi^M(m')$$
$$\int_{(U(F)-U(F)_{c'})/U(F)_c}(c-val_F^c(u))^{2D_1}q^{2val_F^c(u)}du.$$

Cette dernière intégrale est combinaison linéaire de termes qui sont des produits d'intégrales du type (2) et d'au moins une intégrale du type

$$(3)\qquad \int_{(F-\mathfrak{p}_F^{-c'})/\mathfrak{p}_F^{-c}}(c-val_F^c(x))^{2D_1}q^{2val_F^c(x)}dx.$$

On vérifie qu'il existe $\epsilon>0$ tel que cette expression soit essentiellement bornée par $exp(-\epsilon c')$. On en déduit le (iii) de l'énoncé.

Soit $v\in U(F)\cap K$. Dans l'intégrale $X(D,m,m')$, on peut remplacer $\Xi^G(um)$ par $\Xi^G(vum)$, puis intégrer sur v. Donc

$$X(D,m,m') << \int_{U(F)\cap K}\int_{U(F)}\Xi^G(vum)\Xi^G(um')\sigma(vum)^D\sigma(um')^D du\, dv.$$

Choisissons c tel que $U(F)\cap K\subset U(F)_c$. On peut remplacer l'intégrale sur $U(F)\cap K$ par l'intégrale sur $U(F)_c$. Ce groupe étant distingué dans $U(F)$, on peut remplacer vu par uv. On peut ensuite décomposer l'intégrale sur $U(F)$ en la composée d'une intégrale sur $U(F)_c$ et d'une intégrale sur $U(F)/U(F)_c$. On obtient alors

$$X(D,m,m') << X(c,D,m,m'),$$

et l'assertion (iv) résulte de (ii). $\square$

4.9 Comparaison de Ξ^G et Ξ^H

Lemme. *Supposons $r=0$. Il existe $\epsilon>0$ tel que $\Xi^G(h) << exp(-\epsilon\sigma(h))\Xi^H(h)$ pour tout $h\in H(F)$.*

Preuve. On a nécessairement $d_{an,V}=d_{an,W}\pm 1$. Si $d_{an,V}=d_{an,W}+1$, fixons un système hyperbolique maximal $(e_{\pm j})_{j=1,...,n}$ de W. C'est aussi un système hyperbolique maximal de V. Si $d_{an,V}=d_{an,W}-1$, fixons un système hyperbolique maximal $(e_{\pm j})_{j=2,...,n}$ de W. Notons W_{an} l'orthogonal dans W du sous-espace engendré par ces vecteurs. Fixons un système hyperbolique maximal $(e_{\pm 1})$ de $W_{an}\oplus D_0$. Alors $(e_{\pm j})_{j=1,...,n}$ est un système hyperbolique maximal de V. On pose $\iota=1$ dans le premier cas, $\iota=2$ dans le second. Notons A_{min} le sous-tore déployé maximal de G formé des éléments qui conservent chaque droite $Fe_{\pm j}$ pour $j=1,...,n$ et qui agissent trivialement sur l'orthogonal du sous-espace engendré par ces vecteurs. Pour $a\in A_{min}(F)$, et $j=1,...,n$, on note a_j la valeur propre de a sur le vecteur e_j. Posons $A^H_{min}=A_{min}\cap H$. C'est un sous-tore déployé maximal de H. On sait qu'il existe un sous-ensemble compact Γ de $H(F)$ tel que $H(F)=\Gamma A^H_{min}(F)\Gamma$. Il suffit donc de démontrer le lemme pour les éléments de $A^H_{min}(F)$. On va démontrer

(1) il existe un réel D tel que

$$\Xi^G(h) << \Xi^H(h)\sigma(h)^D q^{-\sum_{j=\iota,...,n}|val_F(h_j)|/2}$$

pour tout $h\in A^H_{min}(F)$.

Cette relation implique la majoration de l'énoncé. Notons $\mathfrak{S}$ le groupe des permutations s de $\{\pm 1,...,\pm n\}$ telles que $s(-j)=-s(j)$ pour tout $j\in\{\pm 1,...,\pm n\}$. Si $d_{an,V}=d_{an,W}+1$, on pose $\mathfrak{S}^H=\mathfrak{S}$; si $d_{an,V}=d_{an,W}-1$, on note $\mathfrak{S}^H$ le sous-groupe des $s\in\mathfrak{S}$ qui fixent 1 et -1. Pour tout $s\in\mathfrak{S}$, notons $A_{min}(F)^-_s$ l'ensemble des $a\in A_{min}(F)$ tels que

$$val_F(a_{sn})\geq ...\geq val_F(a_{s1})\geq 0.$$

Le groupe $A^H_{min}(F)$ est contenu dans la réunion des $A_{min}(F)^-_s$ quand s décrit $\mathfrak{S}^H$. On peut fixer s et se limiter à prouver (1) pour $h\in A^H_{min}(F)\cap A_{min}(F)^-_s$. Fixons donc s. Quitte à réindexer notre système hyperbolique, on peut supposer $s=1$. On abandonne les indices s, en conservant les exposants $-$. Notons P_{min} le sous-groupe parabolique de G formé des éléments qui conservent le drapeau

$$Fe_n\subset Fe_n\oplus Fe_{n-1}\subset ...\subset Fe_n\oplus ...\oplus Fe_1.$$

Posons $P^H_{min}=P_{min}\cap H$. D'après [W2] lemme II.1.1, pour $h\in A^H_{min}(F)\cap A_{min}(F)^-$, on a

$$\Xi^H(h) >> \delta_{P^H_{min}}(h)^{1/2}.$$

Ce dernier terme est égal à

$$\prod_{j=\iota,...,n}|h_j|_F^{j-\iota+d_{an,W}/2}$$

D'après la même référence, il existe un réel D tel que

$$\Xi^G(h) << \sigma(h)^D\delta_{P^G_{min}}(h)^{1/2}.$$

Ce dernier terme s'écrit

$$\prod_{j=1,...,n}|h_j|_F^{j-1+d_{an,V}/2}.$$

Remarquons que $d_{an,V}/2 - 1 = 1/2 + d_{an,W}/2 - \iota$ et $h_1 = 1$ si $\iota = 2$. Ces relations entraînent (1). $\square$

4.10 Preuve des relations 4.3(4) et 4.3(5)

On veut prouver la convergence de

$$(1) \qquad \int_{H(F)U(F)_c} \Xi^H(h)\Xi^G(hu)\sigma(hu)^D du\, dh.$$

On utilise 4.3(3) pour majorer l'intégrale sur $U(F)_c$. En remarquant que $\delta_P(h) = 1$ et $\Xi^M(h) = \Xi^{G_0}(h)$, on obtient qu'il existe un réel D' tel que l'intégrale ci-dessus soit essentiellement bornée par

$$\int_{H(F)} \Xi^H(h)\Xi^{G_0}(h)\sigma(h)^{D'} dh.$$

En appliquant le lemme 4.9 à G_0, il existe $\epsilon > 0$ tel que cette expression soit essentiellement bornée par

$$\int_{H(F)} \Xi^H(h)^2 exp(-\epsilon\sigma(h))dh.$$

Or cette intégrale est convergente d'après [W2] lemme II.1.5. D'où la relation 4.3(4).

On veut prouver la convergence de

$$(2) \qquad \int_{H(F)U(F)_c} \int_{H(F)U(F)_c} \Xi^G(hu)\Xi^H(h'h)\Xi^G(h'u')\sigma(hu)^D\sigma(h'u')^D du'\, dh'\, du\, dh.$$

Soit K^H le sous-groupe compact spécial de $H(F)$ sous-jacent à la définition de Ξ^H. On peut remplacer h par kh, avec $k \in K^H$, puis intégrer sur k, tout en divisant par $mes(K^H)$. Or $\Xi^G(khu) << \Xi^G(hu)$ et $\sigma(khu) << \sigma(hu)$. Le procédé ci-dessus revient donc à remplacer le terme $\Xi^H(h'h)$ par

$$mes(K^H)^{-1} \int_{K^H} \Xi^H(h'kh)dk.$$

D'après [W2] lemme II.1.3, ceci n'est autre que $\Xi^H(h')\Xi^H(h)$. Alors l'expression (2) apparaît comme le carré de l'expression (1). Elle est convergente puisque (1) l'est. Cela prouve la relation 4.3(5).

4.11 Majoration d'une intégrale de fonctions d'Harish-Chandra, cas $r = 0$

On suppose dans ce paragraphe $r = 0$. Soit D un réel. Pour $h \in H(F)$ et $N \geq 1$ un entier, posons

$$\chi(h, N, D) = \int_{G(F)} \Xi^G(hx)\Xi^G(x)\kappa_N(x)\sigma(x)^D dx.$$

Lemme. *Cette intégrale est convergente. Le réel D étant fixé, il existe un réel R tel que*

$$\chi(h, N, D) << \Xi^G(h)N^R\sigma(h)^R$$

pour tout $h \in H(F)$ et tout entier $N \geq 1$.

Preuve. Si V est anisotrope, le groupe $G(F)$ est compact et l'assertion est évidente. On suppose que V n'est pas anisotrope. Comme dans la preuve de 4.9, dont on reprend les notations, on introduit un système hyperbolique maximal $(e_{\pm j})_{j=1,...,n}$ de V. On note V_{an} l'orthogonal dans V du sous-espace engendré par ces vecteurs. Si $d_{an,V} = d_{an,W}+1$, v_0 appartient à V_{an}. Si $d_{an,V} = d_{an,W}-1$, on peut choisir e_1 et e_{-1} de sorte que $v_0 = e_1+\nu_0 e_{-1}$, où $\nu_0 = q_V(v_0)$. Il suffit de démontrer le lemme pour $h \in A^H_{min}(F)$. En effet, il existe un sous-ensemble compact Γ^H de $H(F)$ tel que $H(F) = \Gamma^H A^H_{min}(F)\Gamma^H$. Ecrivons $h = \gamma' a\gamma$, avec $\gamma, \gamma' \in \Gamma^H$ et $a \in A^H_{min}(F)$. On effectue le changement de variable $x \mapsto \gamma^{-1}x$. Puisque la fonction κ_N est invariante à gauche par $H(F)$, on obtient

$$\chi(h, N, D) = \int_{G(F)} \Xi^G(\gamma' ax)\Xi^G(\gamma^{-1}x)\kappa_N(x)\sigma(\gamma^{-1}x)^D dx.$$

Mais cette expression est essentiellement majorée par $\chi(a, N, D)$, d'où l'assertion.

On suppose donc $h \in A^H_{min}(F)$. Fixons un sous-groupe d'Iwahori I de $G(F)$ en bonne position relativement à A_{min}. Il est loisible de supposer que Ξ^G est biinvariante par I (par contre, on ne suppose pas que I soit inclus dans le sous-groupe compact spécial K que l'on a fixé, c'est-à-dire dans le fixateur du réseau R). D'après Bruhat-Tits, il existe un sous-ensemble ouvert compact Γ de $G(F)$ tel que $G(F) = IA_{min}(F)\Gamma$. On fixe Γ et on suppose $I \subset \Gamma$. Le groupe $I \cap A_{min}(F)$ est le sous-groupe compact maximal de $A_{min}(F)$. L'application

$$\begin{array}{ccc} A_{min}(F) & \to & \mathbb{Z}^n \\ a & \mapsto & (val_F(a_1), ..., val_F(a_n)) \end{array}$$

se quotiente en un isomorphisme de $A_{min}(F)/(I \cap A_{min}(F))$ sur $\mathbb{Z}^n$. Fixons un sous-ensemble $\Lambda \subset A_{min}(F)$ qui s'envoie bijectivement sur $\mathbb{Z}^n$. Alors

$$\chi(h, N, D) \leq \sum_{a\in\Lambda} \chi(h, N, D, a),$$

où

$$\chi(h, N, D, a) = \int_{Ia\Gamma} \Xi^G(hx)\Xi^G(x)\kappa_N(x)\sigma(x)^D dx.$$

Comme en 4.9, introduisons le groupe de permutations $\mathfrak{S}$ et, pour tout $s \in \mathfrak{S}$, le sous-ensemble $A_{min}(F)^-_s$. Posons $\Lambda^-_s = \Lambda \cap A_{min}(F)^-_s$. Alors Λ est réunion des Λ^-_s. Il nous suffit de fixer s et de majorer $\chi(h, N, D)^-_s$, où

$$\chi(h, N, D)^-_s = \sum_{a\in\Lambda^-_s} \chi(h, N, D, a).$$

Fixons donc s. Quitte à réindexer notre système hyperbolique, on peut supposer $s = 1$. On abandonne les indices s dans les notations précédentes, en conservant seulement les exposants $-$. Il faut prendre garde au fait que, dans le cas où $d_{an,V} = d_{an,W} - 1$, la réindexation n'a pas de raison de conserver les vecteurs e_1 et e_{-1}. Ceux-ci se transforment en des vecteurs que nous notons $e_{\pm t}$, avec $t \in \{1, ..., n\}$. On a $e_0 = e_t + \nu_0 e_{-t}$ ou $e_0 = \nu_0 e_t+e_{-t}$. On introduit le sous-groupe parabolique $P_{min} = M_{min}U_{min}$ de G comme en 4.9. Soit $a \in \Lambda^-$. On a l'égalité $I = (I\cap U_{min}(F))(I\cap \bar{P}_{min}(F))$ et $a^{-1}(I\cap \bar{P}_{min}(F))a \subset I \subset \Gamma$.

Donc $Ia\Gamma = (I \cap U_{min}(F))a\Gamma$. On vérifie que la mesure de cet ensemble est essentiellement bornée par $\delta_{P_{min}}(a)^{-1}$. Donc

$$\chi(h,N,D,a) << \delta_{P_{min}}(a)^{-1}\int_{I\cap U_{min}(F)}\int_{\Gamma}\Xi^G(hya\gamma)\Xi^G(ya\gamma)\kappa_N(ya\gamma)\sigma(ya\gamma)^D d\gamma\, dy.$$

Il existe un entier $c_1 \geq 0$ tel que $\Gamma R \subset \mathfrak{p}_F^{-c_1}R$. De la définition de la fonction κ_N résulte que $\kappa_N(ya\gamma) \leq \kappa_{N+c_1}(ya)$. Alors

$$\chi(h,N,D,a) << \delta_{P_{min}}(a)^{-1}\Xi^G(a)\sigma(a)^D\int_{I\cap U_{min}(F)}\Xi^G(hya)\kappa_{N+c_1}(ya)dy.$$

Grâce au lemme II.1.1 de [W2], il existe un réel D_1 tel que

$$\delta_{P_{min}}(a)^{-1}\Xi^G(a)\sigma(a)^D << \delta_{P_{min}}(a)^{-1/2}\sigma(a)^{D_1}.$$

D'autre part, pour le résultat que l'on veut obtenir, le changement de N en $N+c_1$ est insignifiant. Il nous suffit de majorer

$$(1)\qquad \sum_{a\in\Lambda^-}\delta_{P_{min}}(a)^{-1/2}\sigma(a)^{D_1}Y(h,N,a),$$

où

$$Y(h,N,a) = \int_{I\cap U_{min}(F)}\Xi^G(hya)\kappa_N(ya)dy.$$

Définissons des entiers $N(h)$ et $b(h,N,a)$ par $N(h) = sup(N, N - val_F(h_n))$, $b(h,N,a) = sup(0, val_F(a_n) - N(h))$. Montrons que

(2) il existe $\epsilon' > 0$ tel que

$$Y(h,N;a) << exp(-\epsilon' b(h,N,a))\int_{I\cap U_{min}(F)}\Xi^G(hya)dy$$

pour tous $h \in A^H_{min}(F)$, $N \geq 1$, $a \in \Lambda^-$.

Si $val_F(a_n) \leq N$, il suffit de majorer $\kappa_N(ya)$ par 1. Supposons $val_F(a_n) > N$. Supposons d'abord que v_0 est orthogonal à e_n et e_{-n}, c'est-à-dire que $d_{an,V} = d_{an,W}+1$ ou $d_{an,V} = d_{an,W}-1$ et $t \neq n$. Introduisons le sous-groupe de $G(F)$ formé des éléments $u(z)$, pour $z \in F$, définis ainsi : $u(z)$ envoie v_0 sur $v_0 + ze_n$, e_{-n} sur $e_{-n} - \frac{z}{2\nu_0}v_0 - \frac{z^2}{2\nu_0}e_n$, et fixe e_n ainsi que l'orthogonal du sous-espace engendré par e_{-n}, v_0 et e_n. Il existe un entier c_2 tel que $u(z) \in I \cap U_{min}(F)$ pour $val_F(z) \geq c_2$. On a $h^{-1}u(z)h = u(h_n^{-1}z)$. Pour $z \in \mathfrak{p}_F^{sup(c_2, val_F(h_n)+c_2)}$, les deux éléments $u(z)$ et $h^{-1}u(z)h$ appartiennent à $I \cap U_{min}(F)$. Pour un tel z, on ne modifie pas $Y(h,N,a)$ en remplaçant h par $u(z)h$. On peut ensuite intégrer en z, tout en divisant par $mes(\mathfrak{p}_F^{sup(c_2,val_F(h_n)+c_2)})$. On effectue le changement de variable $y \mapsto h^{-1}u(-z)hy$ et on obtient

$$(3)\qquad Y(h,N,a) = \int_{I\cap U_{min}(F)}\Xi^G(hya)\kappa_{N,h}(ya)dy,$$

où

$$\kappa_{N,h}(ya) = mes(\mathfrak{p}_F^{sup(c_2,val_F(h_n)+c_2)})^{-1}\int_{\mathfrak{p}_F^{sup(c_2,val_F(h_n)+c_2)}}\kappa_N(u(-h_n^{-1}z)ya)dz.$$

Supposons $\kappa_N(u(-h_n^{-1}z)ya) = 1$. Alors $a^{-1}y^{-1}u(h_n^{-1}z)v_0 \in \mathfrak{p}^{-N}R$, c'est-à-dire $a^{-1}y^{-1}(v_0 + h_n^{-1}ze_n) \in \mathfrak{p}^{-N}R$. Il existe c_3 tel que $val_F(q_V(e_{-n}, v)) \geq c_3$ pour tout $v \in R$. Donc

$$val_F(q_V(e_{-n}, a^{-1}y^{-1}(v_0 + h_n^{-1}ze_n))) \geq c_3 - N.$$

Puisque $y \in U_{min}(F)$, on a $y^{-1}e_n = e_n$, donc

$$q_V(e_{-n}, a^{-1}y^{-1}(v_0 + h_n^{-1}ze_n)) = q_V(ae_{-n}, y^{-1}v_0 + h_n^{-1}ze_n) = a_n^{-1}q_V(e_{-n}, y^{-1}v_0) + a_n^{-1}h_n^{-1}z.$$

En posant $z(h, y) = -h_n q_V(e_{-n}, y^{-1}v_0)$ et $c(h, N, a) = val_F(a_n) + val_F(h_n) + c_3 - N$, on a donc $z \in z(h, y) + \mathfrak{p}_F^{c(h,N,a)}$. Alors

$$\kappa_{N,h}(ya) \leq mes(\mathfrak{p}_F^{sup(c_2, val_F(h_n)+c_2)})^{-1} mes(\mathfrak{p}_F^{sup(c_2, val_F(h_n)+c_2)} \cap (z(h, y) + \mathfrak{p}_F^{c(h,N,a)}))$$

$$\leq inf(1, mes(\mathfrak{p}_F^{sup(c_2, val_F(h_n)+c_2)})^{-1} mes(\mathfrak{p}_F^{c(h,N,a)})).$$

On vérifie qu'il existe $\epsilon' > 0$ tel que cette dernière expression soit essentiellement bornée par $exp(-\epsilon' b(h, N, a))$. Alors (3) entraîne la majoration (2). Supposons maintenant que v_0 n'est pas orthogonal aux deux vecteurs e_n et e_{-n}. C'est-à-dire que $d_{an,V} = d_{an,W} - 1$ et $t = n$. On peut écrire $v_0 = \nu_n e_n + \nu_{-n}e_{-n}$. Introduisons le sous-groupe de $A_{min}(F)$ formé des éléments $a(z)$, pour $z \in 1 + \mathfrak{p}_F$, définis ainsi : $a(z)_n = z$ et $a(z)_j = 1$ pour tout $j = 1, ..., n - 1$. Il existe un entier $c_4 > 0$ tel que $a(z) \in I \cap K$ pour tout $z \in 1 + \mathfrak{p}_F^{c_4}$. Un tel $a(z)$ normalise $I \cap U_{min}(F)$, on peut donc effectuer dans $Y(h, N, a)$ le changement de variable $y \mapsto a(z)^{-1}ya(z)$, puis intégrer en z, à condition de diviser par $mes(1 + \mathfrak{p}_F^{c_4})$. Puisque $a(z)$ commute à a et h, on obtient

$$(4) \qquad Y(h, N, a) = \int_{I \cap U_{min}(F)} \Xi^G(hya)\kappa_N^*(ya)dy,$$

où

$$\kappa_N^*(ya) = mes(1 + \mathfrak{p}_F^{c_4})^{-1} \int_{1+\mathfrak{p}_F^{c_4}} \kappa_N(a(z)^{-1}ya)dz.$$

Supposons $\kappa_N(a(z)^{-1}ya) = 1$. Alors $a^{-1}y^{-1}a(z)v_0 \in \mathfrak{p}_F^{-N}R$ et, comme ci-dessus,

$$val_F(q_V(e_{-n}, a^{-1}y^{-1}a(z)v_0)) \geq c_3 - N.$$

On a

$$q_V(e_{-n}, a^{-1}y^{-1}a(z)v_0) = q_V(ae_{-n}, y^{-1}a(z)(\nu_{-n}e_{-n} + \nu_n e_n))$$

$$= a_n^{-1}q_V(e_{-n}, y^{-1}(z^{-1}\nu_{-n}e_{-n} + z\nu_n e_n)) = a_n^{-1}z^{-1}\nu_{-n}q_V(e_{-n}, y^{-1}e_{-n}) + a_n^{-1}z\nu_n.$$

Posons $z(y) = \nu_{-n}\nu_n^{-1}q_V(e_{-n}, y^{-1}e_{-n})$ et $c(N, a) = val_F(a_n) + c_3 - N - val_F(\nu_n)$. Alors $val_F(z(y)+z^2) \geq c(N, a)$. Notons $\mathcal{Z}(y, N, a)$ l'ensemble des z qui vérifient cette condition. Alors, comme ci-dessus,

$$\kappa_N^*(ya) \leq inf(1, mes(1 + \mathfrak{p}_F^{c_4})^{-1} mes(\mathcal{Z}(y, N, a))).$$

On a $mes(\mathcal{Z}(y, N, a) << mes(\mathfrak{p}_F^{c(N,a)})$. Puisque $t = n$, on a $h_n = 1$ par définition de notre système hyperbolique. On vérifie qu'il existe $\epsilon'' > 0$ tel que l'expression ci-dessus soit essentiellement bornée par $exp(-\epsilon'' b(h, N, a))$. Alors (4) entraîne (2), ce qui achève la preuve de cette relation.

Montrons

(5) il existe des réels D_2 et D_3 tels que

$$\int_{I\cap U_{min}(F)}\Xi^G(hya)dy << \sigma(h)^{D_2}\Xi^G(h)\sigma(a)^{D_3}\delta_{P_{min}}(a)^{1/2}$$

pour tout $h\in A_{min}(F)$ et tout $a\in\Lambda^-$.

On peut fixer $s\in\mathfrak{S}$ et supposer $h\in A_{min}(F)_s^-$. L'élément s détermine un sous-groupe parabolique minimal $P_{min,s}=M_{min}U_{min,s}$ formé des éléments de G qui conservent le drapeau

$$Fe_{sn}\subset Fe_{sn}\oplus Fe_{s(n-1)}\subset ...\subset Fe_{sn}\oplus ...\oplus F_{s1}.$$

On note $\bar{U}_{min,s}$ le radical unipotent de $\bar{P}_{min,s}$. On a l'égalité $I\cap U_{min}(F)=(I\cap U_{min}(F)\cap U_{min,s}(F))(I\cap U_{min}(F)\cap\bar{U}_{min,s}(F))$. Pour $y\in I\cap U_{min}(F)\cap U_{min,s}(F)$, on a $hyh^{-1}\in I$. Donc

$$\int_{I\cap U_{min}(F)}\Xi^G(hya)dy << \int_{I\cap U_{min}(F)\cap\bar{U}_{min,s}(F)}\Xi^G(hya)dy$$

$$<< \delta_0(h)\int_{h(I\cap U_{min}(F)\cap\bar{U}_{min,s}(F))h^{-1}}\Xi^G(yha)dy,$$

où $\delta_0(h)$ est la valeur absolue du déterminant de $ad(h^{-1})$ agissant sur $\mathfrak{u}_{min}(F)\cap\bar{\mathfrak{u}}_{min,s}(F)$. Pour $v\in I\cap U_{min}(F)\cap U_{min,s}(F)$, on a $\Xi^G(vyha)=\Xi^G(yha)$. Donc

$$\int_{I\cap U_{min}(F)}\Xi^G(hya)dy << \delta_0(h)\int_{I\cap U_{min}(F)\cap U_{min,s}(F)}\int_{h(I\cap U_{min}(F)\cap\bar{U}_{min,s}(F))h^{-1}}\Xi^G(vyha)dy\,dv.$$

Dans le domaine d'intégration, on a $\sigma(vy)<<\sigma(h)$. Pour tout réel $D_3>0$, on a donc

$$\int_{I\cap U_{min}(F)}\Xi^G(hya)dy << \delta_0(h)\int_{I\cap U_{min}(F)\cap U_{min,s}(F)}$$

$$\int_{h(I\cap U_{min}(F)\cap\bar{U}_{min,s}(F))h^{-1}}\Xi^G(vyha)\sigma(h)^{D_3}\sigma(vy)^{-D_3}dy\,dv$$

$$<< \delta_0(h)\sigma(h)^{D_3}\int_{U_{min}(F)}\Xi^G(uha)\sigma(u)^{-D_3}du.$$

D'après [W2], proposition II.4.5, il existe un réel $D_3\geq 0$ tel que la dernière intégrale soit convergente et essentiellement bornée par $\sigma(ha)^{D_3}\delta_{P_{min}}(ha)^{1/2}$ pour tout $x\in A_{min}(F)$. Fixons un tel D_3. On obtient

$$(6)\qquad \int_{I\cap U_{min}(F)}\Xi^G(hya)dy << \sigma(h)^{2D_3}\sigma(a)^{D_3}\delta_0(h)\delta_{P_{min}}(ha)^{1/2}.$$

On calcule $\delta_0(h)\delta_{P_{min}}(h)^{1/2}=\delta_{P_{min,s}}(h)^{1/2}$. D'après [W2], lemme II.1.1, on a

$$\delta_{P_{min,s}}(h)^{1/2} << \Xi^G(h)$$

puisque $h\in A_{min}(F)_s^-$. Alors (6) entraîne (5).

Grâce à (2) et (5), l'expression (1) est bornée par

$$\sigma(h)^{D_2}\Xi^G(h)\sum_{a\in\Lambda^-}\sigma(a)^{D_1+D_3}exp(-\epsilon' b(h,N,a)).$$

On peut identifier Λ^- à l'ensemble $\mathcal{M}$ des familles $\underline{m} = (m_n, ..., m_1)$ d'entiers telles que $m_n \geq m_{n-1} \geq ... \geq m_1 \geq 0$. Pour une telle famille, posons $b(h, N, \underline{m}) = b(h, N, a)$ où $a \in \Lambda^-$ correspond à la famille $\underline{m}$. C'est-à-dire que $b(h, N, \underline{m}) = sup(0, m_n - N(h))$. On vérifie que

$$\sum_{\underline{m} \in \mathcal{M}} exp(-\epsilon' b(h, N, \underline{m}))$$

est convergente et qu'il existe un réel D_4 tel que cette expression soit essentiellement majorée par $N(h)^{D_4}$. De plus $N(h)^{D_4} << N^{D_4}(1 + |val_F(h_n)|)^{D_4} << N^{D_4}\sigma(h)^{D_4}$. Alors l'expression (1) est bornée par

$$N^{D_4}\sigma(h)^{D_2+D_4}\Xi^G(h).$$

C'est ce qu'on voulait démontrer. $\square$

4.12 Majoration d'une intégrale de fonctions d'Harish-Chandra, cas $r > 0$

Soient D un réel, $C > 0$ un réel et $c \geq 1$, $N \geq 1$ deux entiers. Posons

$$\chi(c, C, N, D) = \int_{M(F)} \int_{U(F)_c} \mathbf{1}_{\sigma \geq C}(u)\Xi^M(m)\Xi^G(um)\kappa_N(m)\delta_P(m)^{-1/2}\sigma(u)^D\sigma(m)^D du\, dm.$$

Lemme. *Cette expression est convergente. Le réel D étant fixé, pour tout réel R, il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$\chi(c, C, N, D) << exp(-cR)N^{-R}$$

pour tout $c \geq 1$, $N \geq 1$ et tout C tel que $C \geq \alpha(log(N) + c)$.

Preuve. Pour $i = 1, ..., r$, on a introduit en 4.5 le sous-groupe parabolique $P_i = M_iU_i$. Posons $U_i' = M_{i+1} \cap U_i$, avec la convention $M_{r+1} = G$. Le groupe U est produit de ces groupes U_i'. D'où

$$\chi(c, C, N, D) = \int_{M(F)} \int_{U_1'(F) \cap U(F)_c} ... \int_{U_r'(F) \cap U(F)_c} \mathbf{1}_{\sigma \geq C}(u_r...u_1)\Xi^M(m)\Xi^G(u_r...u_1m)$$

$$\kappa_N(m)\delta_P(m)^{-1/2}\sigma(u_r...u_1)^D\sigma(m)^D du_r...du_1\, dm.$$

Introduisons une fonction b sur $\{1, ..., r\}$, à valeurs réelles strictement positives, que nous préciserons par la suite. Si nous supposons

$$(1) \qquad C \geq \sum_{i=1,...,r} b(i),$$

la condition $\mathbf{1}_{\sigma \geq C}(u_r...u_1) = 1$ entraîne qu'il existe i tel que $\mathbf{1}_{\sigma \geq b(i)}(u_i) = 1$. Donc $\chi(c, C, N, D)$ est majorée par la somme sur les sous-ensembles non vides J de $\{1, ..., r\}$ des $\chi(c, C, N, D; J)$, où, dans ce dernier terme, on restreint l'intégration aux u_i vérifiant les conditions

- si $i \in J$, $\sigma(u_i) \geq b(i)$;
- si $i \notin J$, $\sigma(u_i) < b(i)$.

On peut fixer J et majorer $\chi(c,C,N,D;J)$. Notons j le plus petit élément de J. On a

$$(2)\quad \chi(c,C,N,D;J) << \int_{M(F)}\int_{U'_1(F)}...\int_{U'_{j-1}(F)}\int_{U'_j(F)\cap U(F)_c}\int_{U_{j+1}(F)\cap U(F)_c}(\prod_{i=1,...,j-1}\mathbf{1}_{\sigma<b(i)}(u_i))$$

$$\mathbf{1}_{\sigma\geq b(j)}(u_j)\Xi^M(m)\Xi^G(u_{j+1}u_j...u_1m)\kappa_N(m)\delta_P(m)^{-1/2}\sigma(u_{j+1}u_j...u_1)^D\sigma(m)^D du_{j+1}...du_1\,dm.$$

La même preuve qu'en 4.7 permet de majorer

$$\int_{U_{j+1}(F)\cap U(F)_c}\Xi^G(u_{j+1}u_j...u_1m)\sigma(u_{j+1}...u_1)^D du_{j+1}$$

par

$$c^{D_1}\sigma(u_j...u_1)^{D_1}\sigma(m)^{D_1}\delta_{P_{j+1}}(u_j...u_1m)^{1/2}\Xi^{M_{j+1}}(u_j....u_1m)$$

pour un réel D_1 convenable. On $\delta_{P_{j+1}}(u_j...u_1m)=\delta_{P_{j+1}}(m)$. Le groupe M_{j+1} est de la forme $A_{j+1}\tilde{G}$, où $\tilde{G}$ est un groupe spécial orthogonal et A_{j+1} est le plus grand sous-tore central et déployé de M_{j+1}. On a $M=A_{j+1}\tilde{M}$, où $\tilde{M}=M\cap\tilde{G}$. On remarque que, pour $a\in A_{j+1}(F)$ et $\tilde{m}\in\tilde{M}(F)$, on a $\Xi^{M_{j+1}}(u_j...u_1a\tilde{m})=\Xi^{\tilde{G}}(u_j...u_1\tilde{m})$, $\Xi^M(a\tilde{m})=\Xi^{M\cap\tilde{G}}(\tilde{m})$, $\delta_P(a\tilde{m})^{-1/2}\delta_{P_{j+1}}(u_j...u_1m)^{1/2}=\delta_{P\cap\tilde{G}}(\tilde{m})^{-1/2}$ et $\kappa_N(a\tilde{m})=\kappa_N(a)\kappa_N^{\tilde{G}}(\tilde{m})$, où $\kappa_N^{\tilde{G}}$ est l'analogue de κ_N pour le groupe $\tilde{G}$. Alors $\chi(c,C,N,D;J)$ est borné par le produit de c^{D_1}, de l'intégrale

$$\int_{A_{j+1}(F)}\kappa_N(a)\sigma(a)^{D+D_1}da$$

et de l'intégrale

$$\int_{\tilde{M}(F)}\int_{U'_1(F)}...\int_{U'_{j-1}(F)}\int_{U'_j(F)\cap U(F)_c}(\prod_{i=1,...,j-1}\mathbf{1}_{\sigma<b(i)}(u_i))\mathbf{1}_{\sigma\geq b(j)}(u_j)\Xi^{M\cap\tilde{G}}(\tilde{m})\Xi^{\tilde{G}}(u_j...u_1\tilde{m})$$

$$\kappa_N^{\tilde{G}}(\tilde{m})\delta_{P\cap\tilde{G}}(\tilde{m})^{-1/2}\sigma(u_j...u_1)^{D+D_1}\sigma(\tilde{m})^{D+D_1}du_j...du_1\,d\tilde{m}.$$

L'intégrale sur $A_{j+1}(F)$ est produit d'intégrales

$$\int_{x\in F;|val_F(x)|\leq N}(1+|val_F(x)|)^{D'}|x|_F^{-1}dx$$

qui sont convergentes et bornées par une puissance de N. La deuxième intégrale est exactement le membre de droite de (2) quand on remplace G par $\tilde{G}$, j par le nombre $\tilde{r}$ analogue de r pour $\tilde{G}$, et D par $D+D_1$. Cela nous ramène au cas où $j=r$, ce que nous supposons désormais. On doit se rappeler qu'à la fin, il faudra multiplier la majoration obtenue par $c^{D_1}N^{D_2}$, pour un certain réel D_2.

Supposons donc $j=r$, c'est-à-dire $J=\{r\}$. On effectue le changement de variable $u_r\mapsto u_{r-1}...u_1u_ru_1^{-1}...u_{r-1}^{-1}$. Cela ne change pas le domaine d'intégration, mais change $\mathbf{1}_{\sigma\geq b(r)}(u_r)$ en $\mathbf{1}_{\sigma\geq b(r)}(u_{r-1}...u_1u_ru_1^{-1}...u_{r-1}^{-1})$. Définissons une fonction b_1 sur $\{1,...,r\}$ par $b_1(i)=b(i)-2\sum_{i'<i}b(i')$. Supposons $b_1(i)>0$ pour tout i. Si $\sigma(u_i)<b(i)$ pour tout $i=1,...,r-1$ et $\mathbf{1}_{\sigma\geq b(r)}(u_{r-1}...u_1u_ru_1^{-1}...u_{r-1}^{-1})=1$, on a $\mathbf{1}_{\sigma\geq b_1(r)}(u_r)=1$. D'où

$$\chi(c,C,N,D;\{r\}) << \int_{M(F)}\int_{U'_1(F)}...\int_{U'_{r-1}(F)}\int_{U'_r(F)\cap U(F)_c}(\prod_{i=1,...,j-1}\mathbf{1}_{\sigma<b(i)}(u_i))\mathbf{1}_{\sigma\geq b_1(r)}(u_r)$$

$$\Xi^M(m)\Xi^G(u_{r-1}...u_1u_rm)\kappa_N(m)\delta_P(m)^{-1/2}\sigma(u_{r-1}...u_1u_r)^D\sigma(m)^D du_r...du_1\, dm.$$

On a $U'_r=U_r$ et on peut décomposer ce groupe en $U_{r,r-1}U_{r,\natural}$. Il existe $c_1>0$ tel que, pour $v\in U_{r,r-1}(F)$ et $u\in U_{r,\natural}(F)$, les conditions $vu\in U(F)_c$ et $\mathbf{1}_{\sigma\geq b_1(r)}(vu)$ entraînent $\sigma(u)\geq b_1(r)-c_1c$. Renforçons la condition $b_1(i)>0$ en

(3) $b_1(i)>c_1c$ pour tout i,

et posons $b_2(i)=b_1(i)-c_1c$. Alors

$$\chi(c,C,N,D;\{r\})<<\int_{M(F)}\int_{U'_1(F)}...\int_{U'_{r-1}(F)}\int_{U_{r,r-1}(F)\cap U(F)_c}\int_{U_{r,\natural}(F)}(\prod_{i=1,...,j-1}\mathbf{1}_{\sigma<b(i)}(u_i))$$

$$\mathbf{1}_{\sigma\geq b_2(r)}(u)\Xi^M(m)\Xi^G(u_{r-1}...u_1vum)\kappa_N(m)\delta_P(m)^{-1/2}\sigma(u_{r-1}...u_1vu)^D\sigma(m)^D du\, dv\, du_{r-1}...du_1\, dm.$$

Grâce à 3.3(5), il existe $c_2>0$ tel que

$$\Xi^G(u_{r-1}...u_1vum)<<exp(c_2\sigma(u_{r-1}...u_1v))\Xi^G(um).$$

Dans le domaine d'intégration, on a $\sigma(u_{r-1}...u_1v)<<c+\sum_{i=1,...,r-1}b(i)$. Il existe donc $c_3>0$ tel que

$$\Xi^G(u_{r-1}...u_1vum)<<exp(c_3(c+\sum_{i=1,...,r-1}b(i)))\Xi^G(um).$$

Alors $\chi(c,C,N,D;\{r\})$ est borné par le produit de $exp(c_3(c+\sum_{i=1,...,r-1}b(i)))$, de l'intégrale

$$\int_{U'_1(F)}...\int_{U'_{r-1}(F)}\int_{U_{r,r-1}(F)\cap U(F)_c}(\prod_{i=1,...,j-1}\mathbf{1}_{\sigma<b(i)}(u_i))\sigma(u_{r-1}...u_1v)^D dv\, du_{r-1}...du_1,$$

et de l'intégrale

$$Z(b_2(r),N,D)=\int_{M(F)}\int_{U_{r,\natural}(F)}\mathbf{1}_{\sigma\geq b_2(r)}(u)\Xi^M(m)\Xi^G(um)\kappa_N(m)\delta_P(m)^{-1/2}\sigma(u)^D\sigma(m)^D du\, dm.$$

La même preuve qu'en 4.4 montre que la première intégrale est bornée par une exponentielle de $c+\sum_{i=1,...,r-1}b(i)$. Il existe donc $c_4>0$ tel que

$$(4)\qquad \chi(c,C,N,D;\{r\})<<exp(c_4(c+\sum_{i=1,...,r-1}b(i)))Z(b_2(r),N,D).$$

On doit majorer $Z(b_2(r),N,D)$. On commence par changer la variable u en u^{-1}. D'après [W2], lemme II.1.1 et II.3..2, il existe un réel D_3 tel que, pour tout $g\in G(F)$, on ait

$$\Xi^G(g)=\Xi^G(g^{-1})<<\delta_{\bar{P}}(m_{\bar{P}}(g^{-1}))^{1/2}\Xi^M(m_{\bar{P}}(g^{-1}))\sigma(g)^{D_3}.$$

On applique cette relation à $g=u^{-1}m$. On a $m_{\bar{P}}(g^{-1})=m^{-1}m_{\bar{P}}(u)$ et $\delta_{\bar{P}}(m^{-1})=\delta_P(m)$, d'où

$$Z(b_2(r),N,D)<<\int_{M(F)}\int_{U_{r,\natural}(F)}\mathbf{1}_{\sigma\geq b_2(r)}(u)\Xi^M(m)\delta_{\bar{P}}(m_{\bar{P}}(u))^{1/2}\Xi^M(m^{-1}m_{\bar{P}}(u))\kappa_N(m)$$

$$\sigma(u)^{D+D_3}\sigma(m)^{D+D_3}du\, dm.$$

On décompose M en AG_0. Comme plus haut, on peut majorer l'intégrale sur $A(F)$ par une puissance de N et on obtient qu'il existe D_4 tel que

$$Z(b_2(r),N,D) << N^{D_4}\int_{G_0(F)}\int_{U_{r,\natural}(F)}\mathbf{1}_{\sigma\geq b_2(r)}(u)\Xi^{G_0}(x)\delta_{\bar{P}}(a(u))^{1/2}\Xi^{G_0}(x^{-1}g_0(u))\kappa_N(x)$$

$$\sigma(u)^{D+D_3}\sigma(x)^{D+D_3}du\,dx,$$

où, pour tout $u\in U_{r,\natural}(F)$, on a écrit $m_{\bar{P}}(u)=a(u)g_0(u)$, avec $a(u)\in A(F)$ et $g_0(u)\in G_0(F)$. Supposons d'abord $r\geq 2$. On remarque qu'alors $U_{r,\natural}(F)$ est invariant par conjugaison par $G_0(F)$, a fortiori par $K\cap G_0(F)$. Soit $k\in K\cap G_0(F)$. On peut remplacer la variable u par kuk^{-1}, puis intégrer en k. Changer u en kuk^{-1} ne modifie qu'une seule des fonctions que l'on intègre, à savoir $\Xi^{G_0}(x^{-1}g_0(u))$. On a $g_0(kuk^{-1})=kg_0(u)k^{-1}$ d'où, puisque Ξ^{G_0} est invariante par $K\cap G_0(F)$, $\Xi^{G_0}(x^{-1}g_0(kuk^{-1}))=\Xi^{G_0}(x^{-1}kg_0(u))$. Or, d'après [W2], lemme II.1.3, l'intégrale de ce terme sur $k\in K\cap G_0(F)$ est égale à $\Xi^{G_0}(x^{-1})\Xi^{G_0}(g_0(u))$, ou encore à $\Xi^{G_0}(x)\Xi^{G_0}(g_0(u))$. On voit alors que

$$Z(b_2(r),N,D) << N^{D_4}\chi^{G_0}(1,N,D+D_3)I_{r,\natural}(b_2(r),D+D_3),$$

avec les notations introduites en 4.5 et 4.11 (l'exposant G_0 indiquant que le groupe ambiant est G_0 au lieu de G). D'après les lemmes de ces paragraphes, il y a un réel D_5 et un réel $\epsilon>0$ tel que

$$(5)\qquad Z(b_2(r),N,D) << N^{D_5}exp(-\epsilon b_2(r)).$$

Supposons maintenant $r=1$. Dans ce cas, on introduit le sous-espace $V_\sharp$ de V orthogonal à D_0 et son groupe spécial orthogonal $G_\sharp$. On fixe un sous-groupe compact spécial $K_\sharp$ de $G_\sharp(F)$. Le groupe $U_{1,\natural}$ est contenu dans le groupe $G_\sharp$. Ecrivons $m_{\bar{P}_\sharp}(u)=a_\sharp(u)g_{0,\sharp}(u)$, avec $a_\sharp(u)\in A(F)$ et $g_{0,\sharp}(u)\in G_0(F)\cap G_\sharp(F)=H(F)$. Comme dans la preuve du lemme 4.6, les éléments $a(u)a_\sharp(u)^{-1}$ et $g_0(u)g_{0,\sharp}(u)^{-1}$ restent dans des compacts. En utilisant les relations $\Xi^{G_0}(x^{-1}g_0(u)) << \Xi^{G_0}(x^{-1}g_{0,\sharp}(u))=\Xi^{G_0}(g_{0,\sharp}(u)^{-1}x)$, on voit que l'on a

$$Z(b_2(r),N,D) << N^{D_4}\int_{U_{r,\natural}(F)}\mathbf{1}_{\sigma\geq b_2(r)}(u)\delta_{\bar{P}}(a(u))^{1/2}\chi^{G_0}(g_{0,\sharp}(u)^{-1},N,D+D_3)\sigma(u)^{D+D_3}du.$$

En utilisant les lemmes 4.11 puis 4.6, on obtient encore une majoration de la forme (5).

Les formules (4) et (5) fournissent une majoration de $\chi(c,C,N,D;\{r\})$. Revenons au terme plus général $\chi(c,C,N,D;J)$. On doit remplacer r par j. On doit aussi multiplier la majoration issue de (4) et (5) par $c^{D_1}N^{D_2}$. Mais le terme c^{D_1} est absorbé par le facteur $exp(c_4c)$ qui figure dans (4), quitte à augmenter c_4. On obtient qu'il existe des réels c_5, D_5, ϵ, tous strictement positifs, tels que

$$(6)\qquad \chi(c,C,N,D;J) << N^{D_5}exp(c_5(c+\sum_{i=1,...,j-1}b(i))-\epsilon b_2(j)).$$

Soit R un réel. Fixons, indépendamment de c, C et N, une fonction b^* sur $\{1,...,r\}$, à valeurs réelles strictement positives. On en déduit comme ci-dessus une fonction b_1^*. Supposons que b_1^* vérifie

$$b_1^*(i)>c_1,$$

$$\epsilon b_1^*(i)-c_5\sum_{i'=1,...,i-1}b^*(j)>sup(R+c_5+\epsilon c_1,R+D_5)$$

pour tout i. Une telle fonction existe, ces conditions pouvant être imposées par récurrence sur i. Prenons pour fonction b la fonction $b(i) = (c + log(N))b^*(i)$. Cette fonction vérifie (3). On a

$$c_5(c + \sum_{i=1,\ldots,j-1} b(i)) - \epsilon b_2(j) < -(R + D_5)log(N) - Rc.$$

Alors la majoration (6) devient

$$\chi(c, C, N, D; J) << N^{-R} exp(-Rc),$$

c'est-à-dire celle que l'on voulait. La seule condition que l'on a imposée à C est la condition (1), qui s'écrit $C \geq \alpha(c + log(N))$, où $\alpha = \sum_{i=1,\ldots,r} b^*(i)$. $\square$

4.13 Preuve de la relation 4.3(2)

On veut majorer

$$I(N, D) = \int_{G(F)} \Xi^G(g)^2 \kappa_N(g)\sigma(g)^D dg.$$

Par la décomposition usuelle de la mesure dg, on a

$$I(N, D) = \int_K \int_{M(F)} \int_{U(F)} \Xi^G(umk)^2 \kappa_N(umk)\sigma(umk)^D \delta_P(m)^{-1} du\, dm\, dk.$$

Le k disparaît et l'intégrale sur K également. Puisque κ_N est invariante à gauche par $U(F)$, l'intégrale en u est celle notée $X(D, m, m)$ en 4.8. D'après le (iv) du lemme de ce paragraphe, on obtient

$$I(N, D) << \int_{M(F)} \Xi^M(m)^2 \kappa_N(m)\sigma(m)^{D'} dm,$$

pour un réel D' convenable. On décompose M en AG_0. Comme dans la preuve précédente, on obtient

$$I(N, D) << \int_{A(F)} \sigma(a)^{D'} \kappa_N(a) da \int_{G_0(F)} \sigma(g_0)^{D'} \Xi^{G_0}(g_0)^2 \kappa_N(g_0) dg_0.$$

La première intégrale est convergente et bornée par une puissance de N. La seconde intégrale n'est autre que $\chi(1, N, D'/2)$, avec la notation de 4.11 appliquée au groupe G_0. Par le lemme de ce paragraphe, elle est convergente et bornée par une puissance de N. D'où la relation 4.3(2).

4.14 Preuve de la relation 4.3(7)

La conclusion que l'on veut obtenir nous autorise à supposer $c' \geq c$. Alors l'ensemble $U(F) - U(F)_{c'}$ est invariant par translation par $U(F)_c$ et on peut décomposer l'intégrale en $u' \in U(F) - U(F)_{c'}$ en composée d'une intégrale sur $U(F)_c$ et d'une intégrale sur $(U(F) - U(F)_{c'})/U(F)_c$. C'est-à-dire

$$I(c, c', N, D) = \int_{M(F)} \int_{H(F)U(F)_c} \int_{(U(F)-U(F)_{c'})/U(F)_c} \int_{U(F)_c} \phi(m, h, u, u'v_1; D) dv_1\, du'\, du\, dh\, dm.$$

Posons $v_2 = u'^{-1}u^{-1}h^{-1}u'v_1h$. Le groupe $H(F)U(F)_c$ normalise $U(F)_c$ et agit trivialement sur $U(F)/U(F)_c$. Quand u décrit $U(F)_c$, v_2 décrit le même ensemble. On remplace la variable u par v_2. Le jacobien de cette transformation est 1 et on obtient

$$I(c,c',N,D) << \int_{M(F)}\int_{H(F)} \Xi^H(h)\sigma(h)^{D_1}\kappa_N(m)\sigma(m)^D\delta_P(m)^{-1}\int_{(U(F)-U(F)_{c'})/U(F)_c}$$

$$\int_{U(F)_c}\int_{U(F)_c} \Xi^G(u'v_1m)\Xi^G(u'v_2h^{-1}m)\sigma(u'v_1)^D\sigma(u'v_2)^{D_1}dv_1\,dv_2\,du'\,dh\,dm$$

pour un réel D_1 convenable. La triple intégrale intérieure est essentiellement $X(c,c',D,m,h^{-1}m)$, avec la notation de 4.8. En appliquant le (iii) du lemme de ce paragraphe, et en remarquant que $\delta_P(h)=1$, on obtient

$$I(c,c',N,D) << exp(-\epsilon c')\int_{M(F)}\int_{H(F)} \Xi^H(h)\Xi^M(m)\Xi^M(h^{-1}m)\kappa_N(m)\sigma(h)^{D_2}\sigma(m)^{D_2}$$

pour des réels D_2 et $\epsilon > 0$ convenables. Comme dans le paragraphe précédent, on décompose l'intégrale sur $M(F)$ en produit d'intégrales sur $A(F)$ et $G_0(F)$. L'intégrale sur $A(F)$ est bornée par une puissance de N. D'après le lemme 4.11, l'intégrale sur $G_0(F)$ est bornée par $exp(-\epsilon'\sigma(h))\Xi^H(h)N^{D_3}$ pour des réels D_3 et $\epsilon' > 0$ convenables. Il reste une intégrale

$$\int_{H(F)} \Xi^H(h)^2\sigma(h)^{D_2}exp(-\epsilon'\sigma(h))dh,$$

qui est convergente. Finalement, on a une majoration

$$I(c,c',N,D) << exp(-\epsilon c')N^{D_4},$$

pour un réel D_4 convenable. Soit R un réel. Il existe $\alpha > 0$ tel que, si $c' \geq \alpha log(N)$, l'expression ci-dessus est majorée par N^{-R}. C'est ce qu'il fallait démontrer. □

4.15 Preuve de la relation 4.3(8)

On a

$$I(c,c',N,C,D) << I(sup(c,c'),sup(c,c'),N,C,D).$$

Puisque c est fixé, on peut aussi bien majorer le membre de droite, autrement dit supposer $c=c'$. Introduisons un réel $b>0$ que nous préciserons plus tard. On a

$$I(c',c',N,C,D) = I_{\geq b}(c',c',N,C,D) + I_{<b}(c',c',N,C,D),$$

où

$$I_{\geq b}(c',c',N,C,D) = \int_{M(F)}\int_{H(F)U(F)_{c'}}\int_{U(F)_{c'}} \mathbf{1}_{\sigma\geq b}(h)\mathbf{1}_{\sigma\geq C}(hu)\phi(m,h,u,u';D)du'\,du\,dh\,dm,$$

et

$$I_{<b}(c',c',N,C,D) = \int_{M(F)}\int_{H(F)U(F)_{c'}}\int_{U(F)_{c'}} \mathbf{1}_{\sigma< b}(h)\mathbf{1}_{\sigma\geq C}(hu)\phi(m,h,u,u';D)du'\,du\,dh\,dm.$$

Dans la première intégrale, on majore $\mathbf{1}_{\sigma\geq C}(hu)$ par 1. On effectue le changement de variable $u\mapsto h^{-1}u'hu^{-1}$ et on obtient

$$I_{\geq b}(c',c',N,C,D)<<\int_{M(F)}\int_{H(F)}\mathbf{1}_{\sigma\geq b}(h)\Xi^H(h)\kappa_N(m)\sigma(h)^{D_1}\sigma(m)^D\delta_P(m)^{-1}$$

$$\int_{U(F)_{c'}}\int_{U(F)_{c'}}\Xi^G(u'm)\Xi^G(uh^{-1}m)\sigma(u)^D\sigma(u')^{D_1}du'\,du\,dh\,dm,$$

pour un réel D_1 convenable. Les intégrales sur $U(F)_{c'}$ sont majorées par 4.3(3). On en déduit une majoration

$$I_{\geq b}(c',c',N,C,D)<<c'^{D_2}\int_{M(F)}\int_{H(F)}\mathbf{1}_{\sigma\geq b}(h)\Xi^H(h)\Xi^M(m)\Xi^M(h^{-1}m)\kappa_N(m)$$

$$\sigma(h)^{D_2}\sigma(m)^{D_2}dh\,dm,$$

pour un réel D_2 convenable. Ainsi qu'on l'a déjà fait plusieurs fois, on décompose l'intégrale sur $M(F)$ en le produit d'intégrales sur $A(F)$ et $G_0(F)$. L'intégrale sur $A(F)$ est bornée par une puissance de N. L'intégrale sur $G_0(F)$ est l'expression $\chi^{G_0}(h^{-1},N,D_2)$ de 4.11. En utilisant le lemme de ce paragraphe, on obtient

$$I_{\geq b}(c',c',N,C,D)<<c'^{D_3}N^{D_3}\int_{H(F)}\mathbf{1}_{\sigma\geq b}(h)\Xi^H(h)\Xi^{G_0}(h)\sigma(h)^{D_3}dh,$$

pour un réel D_3 convenable. D'après le lemme 4.9, il existe $\epsilon>0$ tel que ceci soit borné par

$$c'^{D_3}N^{D_3}\int_{H(F)}\mathbf{1}_{\sigma\geq b}(h)\Xi^H(h)^2exp(-\epsilon\sigma(h))dh.$$

Pour $\sigma(h)\geq b$, on a $exp(-\epsilon\sigma(h))\leq exp(-\epsilon b/2)exp(-\epsilon\sigma(h)/2)$, d'où

$$I_{\geq b}(c',c',N,C,D)<<c'^{D_3}N^{D_3}exp(-\epsilon b/2)\int_{H(F)}\Xi^H(h)^2exp(-\epsilon\sigma(h)/2)dh.$$

La dernière intégrale est convergente, d'où

$$(1)\qquad I_{\geq b}(c',c',N,C,D)<<c'^{D_3}N^{D_3}exp(-\epsilon b/2).$$

Considérons maintenant l'intégrale $I_{<b}(c',c',N,C,D)$. On effectue encore le changement de variable $u\mapsto h^{-1}u'hu^{-1}$. La condition $\sigma(hu)\geq C$ devient $\sigma(u'hu^{-1})\geq C$. Jointe à la condition $\sigma(h)<b$, elle entraîne $\sigma(u)+\sigma(u')\geq C-b$, a fortiori $sup(\sigma(u),\sigma(u'))\geq (C-b)/2$. Supposons $C-b>0$. Alors

$$I_{<b}(c',c',N,C,D)<<I'_<(c',c',N,C,D)+I''_<(c',c',N,C,D),$$

où, pour un réel D_4 convenable,

$$I'_<(c',c',N,C,D)=\int_{M(F)}\int_{H(F)}\int_{U(F)_{c'}}\int_{U(F)_{c'}}\mathbf{1}_{\sigma<b}(h)\mathbf{1}_{\sigma\geq((C-b)/2)}(u')\Xi^H(h)\Xi^G(u'm)$$

$$\Xi^G(uh^{-1}m)\kappa_N(m)\sigma(u')^{D_4}\sigma(u)^{D_4}\sigma(h)^{D_4}\sigma(m)^{D_4}\delta_P(m)^{-1}du'\,du\,dh\,dm,$$

et $I''_<(c',c',N,D)$ est l'expression analogue où $\mathbf{1}_{\sigma\geq(C-b)/2}(u')$ est remplacé par $\mathbf{1}_{\sigma\geq(C-b)/2}(u)$. En fait, le changement de variables $(h,m)\mapsto(h^{-1},h^{-1}m)$ rend les deux expressions similaires. Il suffit donc de borner $I'_<(c',c',N,C,D)$. L'intégrale en u se majore grâce à 4.3(3). On obtient

$$I'_<(c',c',N,C,D) << c'^{D_5}\int_{M(F)}\int_{H(F)}\int_{U(F)_{c'}}\mathbf{1}_{\sigma<b}(h)\mathbf{1}_{\sigma\geq((C-b)/2)}(u')\Xi^H(h)\Xi^G(u'm)$$

$$\Xi^M(h^{-1}m)\kappa_N(m)\sigma(u')^{D_5}\sigma(h)^{D_5}\sigma(m)^{D_5}\delta_P(m)^{-1/2}du'\,dh\,dm,$$

pour un réel D_5 convenable. D'après 3.3(5), il existe $c_1>0$ tel que $\Xi^M(h^{-1}m) << exp(c_1\sigma(h))\Xi^M(m)$. Puisque $\sigma(h)<b$, on obtient

$$I'_<(c',c',N,C,D) << c'^{D_5}b^{D_5}exp(c_1b)\int_{H(F)}\mathbf{1}_{\sigma<b}dh\int_{M(F)}\int_{U(F)_{c'}}\mathbf{1}_{\sigma\geq((C-b)/2)}(u')\Xi^G(u'm)$$

$$\Xi^M(m)\kappa_N(m)\sigma(u')^{D_5}\sigma(m)^{D_5}\delta_P(m)^{-1/2}du'\,dm.$$

L'intégrale sur $H(F)$ est majorée par 4.3(1). Le produit des quatre premiers termes ci-dessus est borné par $c'^{D_5}exp(c_2b)$ pour un réel $c_2>0$ convenable. La seconde intégrale est majorée par le lemme 4.12. Précisément, fixons un réel R', soit α la constante que ce lemme lui associe. Alors on obtient une majoration

$$(2)\qquad I'_<(c',c',N,C,D) << c'^{D_5}exp(c_2b)exp(-R'c')N^{-R'},$$

pourvu que $(C-b)/2\geq\alpha(log(N)+c')$. Soit $R>0$ un réel, choisissons $b=2\epsilon^{-1}(R+D_3)log(N)+Rc'(2c_2)^{-1}$. La majoration (1) devient

$$I_{\geq b}(c',c',N,C,D) << c'^{D_3}exp(-\epsilon Rc'(4c_2)^{-1})N^{-R} << N^{-R}.$$

Choisissons $R'=R+2c_2\epsilon^{-1}(R+D_3)$. La majoration (2) devient

$$I'_{<b}(c',c',N,C,D) << c'^{D_5}exp(-Rc'/2)N^{-R} << N^{-R}.$$

Cela vaut pour $(C-b)/2\geq\alpha(log(N)+c')$. Mais il existe $\alpha'>0$ tel que cette condition soit vérifiée pour $C\geq\alpha'(log(N)+c')$. C'est ce qu'on voulait démontrer. $\square$

4.16 Preuve de la relation 4.3(6)

L'expression $I(c,N,D)$ est égale à la somme de $I(c,c,N,D)$ et de $I(c,c,N,1,D)$. Il suffit de reprendre les preuves des deux paragraphes précédents pour montrer que ces deux termes sont bornés par une puissance de N. $\square$

5 Entrelacements tempérés

5.1 Définition des entrelacements tempérés

Soient (V,q_V) et (W,q_W) deux espaces quadratiques compatibles, avec $d_W<d_V$. On utilise les notations de la section 4. Soit π, resp. ρ, une représentation tempérée de $G(F)$,

resp. $H(F)$. On note $Hom_{H,\xi}(\pi,\rho)$ l'espace des applications linéaires $l : E_\pi \to E_\rho$ telles que $l(\pi(hu)e) = \xi(u)\rho(h)l(e)$ pour tous $h \in H(F)$, $u \in U(F)$, $e \in E_\pi$. Dans le cas où π et ρ sont irréductibles, on sait que $Hom_{H,\xi}(\pi,\rho)$ est de dimension au plus 1. En tout cas, cet espace est de dimension finie. On note $m(\rho,\pi)$ cette dimension. Ce nombre ne dépend pas des différents choix que l'on a effectués. Pour simplifier la rédaction, on note aussi $m(\pi,\rho) = m(\rho,\pi)$.On munit E_π et E_ρ de produits scalaires invariants. On définit une forme sesquilinéaire $\mathcal{L}_{\pi,\rho,c}$ sur $E_\rho \otimes_{\mathbb{C}} E_\pi$ par

$$\mathcal{L}_{\pi,\rho,c}(\epsilon' \otimes e', \epsilon \otimes e) = \int_{H(F)U(F)_c} (\rho(h)\epsilon', \epsilon)(e', \pi(hu)e)\bar{\xi}(u)dudh$$

pour tous $\epsilon, \epsilon' \in E_\rho$ et $e, e' \in E_\pi$. Cette expression est absolument convergente. En effet, elle est majorée par

$$\int_{H(F)U(F)_c} \Xi^H(h)\Xi^G(hu)dudh$$

qui est convergente d'après 4.3(4).

Pour tout entier $c' \geq 1$, notons $\omega_A(c')$ le sous-groupe des $a \in A(F)$ tels que $val_F(a_i - 1) \geq c'$ pour tout $i = 1, ..., r$.

Lemme . *Pour tous $\epsilon, \epsilon', e, e'$, il existe un entier c_0 tel que $\mathcal{L}_{\pi,\rho,c}(\epsilon' \otimes e', \epsilon \otimes e)$ soit indépendant de c pour $c \geq c_0$. Plus précisément, soit c' un entier ≥ 1. Alors il existe un entier c_0 tel que cette conclusion soit vérifiée pour tous ϵ, ϵ' et tous $e, e' \in E_\pi^{\omega_A(c')}$.*

La preuve est similaire à celle du lemme 3.5. $\square$

On définit une forme sesquilinéaire $\mathcal{L}_{\pi,\rho}$ sur $E_\rho \otimes_{\mathbb{C}} E_\pi$ par

$$\mathcal{L}_{\pi,\rho}(\epsilon' \otimes e', \epsilon \otimes e) = lim_{c\to\infty}\mathcal{L}_{\pi,\rho,c}(\epsilon' \otimes e', \epsilon \otimes e).$$

Cette forme vérifie les relations

$$\mathcal{L}_{\pi,\rho}(\rho(h)\epsilon' \otimes e', \epsilon \otimes \pi(hu)e) = \xi(u)\mathcal{L}_{\pi,\rho}(\epsilon' \otimes e', \epsilon \otimes e)$$

$$\mathcal{L}_{\pi,\rho}(\epsilon' \otimes \pi(hu)e', \rho(h)\epsilon \otimes e) = \bar{\xi}(u)\mathcal{L}_{\pi,\rho}(\epsilon' \otimes e', \epsilon \otimes e)$$

pour tous $h \in H(F)$, $u \in U(F)$. Elle est donc combinaison linéaire de fonctions

$$(\epsilon' \otimes e', \epsilon \otimes e) \mapsto (\epsilon', l(e))(l'(e'), \epsilon)$$

où $l, l' \in Hom_{H,\xi}(\pi,\rho)$. En particulier, elle est nulle si $Hom_{H,\xi}(\pi,\rho) = \{0\}$.

Supposons π et ρ irréductibles et $\mathcal{L}_{\pi,\rho}$ non nulle. L'espace $Hom_{H,\xi}(\pi,\rho)$ est de dimension 1. On peut fixer un élément non nul l de cet espace et un nombre complexe $c \neq 0$ tels que

$$\mathcal{L}_{\pi,\rho}(\epsilon' \otimes e', \epsilon \otimes e) = c(\epsilon', l(e))(l(e'), \epsilon)$$

pour tous $\epsilon, \epsilon', e, e'$. Il en résulte l'égalité

$$(1) \qquad |\mathcal{L}_{\pi,\rho}(\epsilon' \otimes e', \epsilon \otimes e)|^2 = |\mathcal{L}_{\pi,\rho}(\epsilon' \otimes e, \epsilon' \otimes e)||\mathcal{L}_{\pi,\rho}(\epsilon \otimes e', \epsilon \otimes e')|.$$

En conséquence

(2) il existe ϵ et e tels que

$$\mathcal{L}_{\pi,\rho}(\epsilon \otimes e, \epsilon \otimes e) \neq 0.$$

On a supposé $d_W < d_V$. Pour simplifier la rédaction, dans le cas $d_W > d_V$, on pose $\mathcal{L}_{\pi,\rho} = \mathcal{L}_{\rho,\pi}$.

5.2 Induction d'entrelacements tempérés

Soient (V, q_V) et (W, q_W) deux espaces quadratiques compatibles, avec $d_W < d_V$. Soit $V = \tilde{V} \oplus Y$ une décomposition orthogonale, avec Y hyperbolique. On fixe une base hyperbolique $(y_{\pm j})_{j=1,...,k}$ de Y, on note Y^+, resp. Y^-, le lagrangien engendré par $(y_j)_{j=1,...,k}$, resp. $(y_{-j})_{j=1,...,k}$. On suppose $k \geq 1$. On note Q le sous-groupe parabolique de G formé des éléments qui conserventY^+, L son sous-groupe de Lévi formé des éléments qui conservent de plus Y^-, U_Q le radical unipotent de Q, GL_k le groupe des automorphismes linéaires de Y^+ et $\tilde{G}$ le groupe spécial orthogonal de $\tilde{V}$. On a $L = GL_k \times \tilde{G}$. On fixe un sous-groupe compact spécial K de $G(F)$ en bonne position relativement à L.

Soit $\tilde{\pi}$, resp. μ, ρ, une représentation admissible irréductible et tempérée de $\tilde{G}(F)$, resp. $GL_k(F)$, $H(F)$. On fixe des produits scalaires invariants sur les espaces de ces représentations. Introduisons la représentation induite $\pi = Ind_Q^G(\mu \otimes \tilde{\pi})$, que l'on réalise dans l'espace $E_\pi = E^G_{Q,\mu\otimes\tilde{\pi}}$. On munit E_π du produit scalaire invariant

$$(e', e) = \int_{Q(F)\backslash G(F)} (e'(g), e(g))dg.$$

On définit les formes sesquilinéaires $\mathcal{L}_{\pi,\rho}$ sur $E_\rho \otimes_{\mathbb{C}} E_\pi$ et $\mathcal{L}_{\tilde{\pi},\rho}$ sur $E_\rho \otimes_{\mathbb{C}} E_{\tilde{\pi}}$.

Proposition. *La forme $\mathcal{L}_{\pi,\rho}$ est non nulle si et seulement si la forme $\mathcal{L}_{\tilde{\pi},\rho}$ est non nulle.*

Preuve. Soient $e, e' \in E_\pi$ et $\epsilon, \epsilon' \in E_\rho$, choisissons un entier c assez grand. On a l'égalité

$$\mathcal{L}_{\pi,\rho}(\epsilon' \otimes e', \epsilon \otimes e) = \mathcal{L}_{\pi,\rho,c}(\epsilon' \otimes e', \epsilon \otimes e) = \int_{H(F)U(F)_c} (\rho(h)\epsilon', \epsilon)$$

$$\int_{Q(F)\backslash G(F)} (e'(g), e(ghu))dg\, \bar{\xi}(u)\, du\, dh.$$

Montrons que

(1) cette expression est absolument convergente.

On a

$$\int_{Q(F)\backslash G(F)} |(e'(g), e(ghu))|dg = \int_K |(e'(k), e(khu))|dk$$

$$= \int_K |(e'(k), (\mu \otimes \tilde{\pi})(l_Q(khu))e(k_Q(khu)))|\delta_Q(l_Q(khu))^{1/2}dk.$$

Parce que μ et $\tilde{\pi}$ sont tempérées, il s'ensuit que

$$\int_{Q(F)\backslash G(F)} |(e'(g), e(ghu))|dg << \int_K \delta_Q(l_Q(khu))^{1/2}\Xi^L(l_Q(khu))dk = \Xi^G(hu),$$

la dernière égalité résultant de [W2] lemme II.1.6. L'expression à étudier est donc bornée par un multiple de

$$\int_{H(F)U(F)_c} \Xi^H(h)\Xi^G(hu)dh\, du$$

qui est convergente d'après 4.3(4). Cela prouve (1).

Traitons d'abord le cas où $k \leq r$. On peut supposer $y_j = v_{k-r-j}$ pour $j = 1, ..., k$. Alors $P \subset \bar{Q}$. On a

$$\int_{Q(F)\backslash G(F)} (e'(g), e(ghu))dg = \int_{U_{\bar{Q}}(F)} (e'(\bar{v}'), e(\bar{v}'uh))d\bar{v}',$$

d'où, par le changement de variables $u \mapsto \bar{v}'^{-1}u$,

$$(2) \qquad \mathcal{L}_{\pi,\rho}(\epsilon' \otimes e', \epsilon \otimes e) = \int_{H(F)} (\rho(h)\epsilon', \epsilon)$$

$$\int_{(\bar{v}',u)\in U_{\bar{Q}}(F)\times U(F);\bar{v}'^{-1}u\in U(F)_c} (e'(\bar{v}'), e(uh))\bar{\xi}(\bar{v}')^{-1}\bar{\xi}(u)du\, d\bar{v}'\, dh.$$

Posons $U_k = U \cap GL_k$ et $\tilde{U} = U \cap \tilde{G}$. Remarquons que la restriction de ξ à $U_k(F)$ est le caractère de ce groupe défini en 3.5 tandis que la restriction de ξ à $\tilde{U}(F)$ est le caractère analogue à ξ quand on remplace G par $\tilde{G}$ dans les définitions. Décomposons u en $u = n\tilde{u}\bar{v}$, avec $n \in U_k(F)$, $\tilde{u} \in \tilde{U}(F)$ et $\bar{v} \in U_{\bar{Q}}(F)$. La condition $\bar{v}'^{-1}u \in U(F)_c$ équivaut à $n \in U_k(F)_c$, $\tilde{u} \in \tilde{U}(F)_c$ et $\bar{v}'^{-1}\bar{v} \in U(F)_c \cap U_{\bar{Q}}(F)$. Cette dernière condition s'écrit concrètement

$$val_F(q_V(\bar{v}v_{r-k}, v_{k-r-1}) - q_V(\bar{v}'v_{r-k}, v_{k-r-1})) \geq -c.$$

De même, on a l'égalité

$$\bar{\xi}(\bar{v}'^{-1}\bar{v}) = \psi(q_V(\bar{v}v_{r-k}, v_{k-r-1}) - q_V(\bar{v}'v_{r-k}, v_{k-r-1})).$$

Dans l'expression (2), effectuons le changement de variables $\bar{v} \mapsto h\bar{v}h^{-1}$. cela ne modifie pas les conditions ci-dessus et le jacobien de cette transformation vaut 1. On obtient

$$\mathcal{L}_{\pi,\rho}(\epsilon' \otimes e', \epsilon \otimes e) = \int_{(\bar{v}',\bar{v})\in U_{\bar{Q}}(F)^2;\bar{v}'^{-1}\bar{v}\in U(F)_c} \int_{H(F)\tilde{U}(F)_c} \int_{U_k(F)_c} (\rho(h)\epsilon', \epsilon)$$

$$(e'(\bar{v}'), \mu(n)\tilde{\pi}(h\tilde{u})e(\bar{v}))\bar{\xi}(n)\bar{\xi}(\tilde{u})\bar{\xi}(\bar{v}'^{-1}\bar{v})dn\, dh\, d\tilde{u}\, d\bar{v}\, d\bar{v}'.$$

Cette expression est encore absolument convergente. Pour un entier $c' \geq 1$, introduisons le sous-groupe $\omega_A(c') \subset A(F)$ de 5.1. Choisissons c' tel que e et e' soient invariants par $\omega_A(c')$ et que le caractère central de μ soit trivial sur $1 + \mathfrak{p}_F^{c'}$. Soient $a, a' \in \omega_A(c')$. Considérons l'expression

$$(3) \qquad \int_{(\bar{v}',\bar{v})\in U_{\bar{Q}}(F)^2;\bar{v}'^{-1}\bar{v}\in U(F)_c} \int_{H(F)\tilde{U}(F)_c} \int_{U_k(F)_c} (\rho(h)\epsilon', \epsilon)$$

$$((\mu \otimes \tilde{\pi})(a')e'(\bar{v}'), \mu(n)\tilde{\pi}(h\tilde{u})(\mu \otimes \tilde{\pi})(a)e(\bar{v}))\bar{\xi}(n)\bar{\xi}(\tilde{u})\bar{\xi}(\bar{v}'^{-1}\bar{v})dn\, dh\, d\tilde{u}\, d\bar{v}\, d\bar{v}'.$$

Introduisons le sous-groupe $\omega'_A(c')$ formé des $\alpha \in \omega_A(c')$ tels que $\alpha_{r-k} = \alpha_{r-k+1}$.On a l'égalité $\omega_A(c') = (Z_k(F) \cap \omega_A(c')) \times \omega'_A(c')$. Ecrivons $a = z\alpha$, $a' = z'\alpha'$ conformément à cette décomposition. On a $\mu(z) = 1 = \mu(z')$ et on a l'égalité

$$((\mu \otimes \tilde{\pi})(a')e'(\bar{v}'), \mu(n)\tilde{\pi}(h\tilde{u})(\mu \otimes \tilde{\pi})(a)e(\bar{v})) = (e'(\alpha'\bar{v}'), \mu(n)\tilde{\pi}(h\tilde{u})e(\alpha\bar{v})).$$

On effectue les changements de variables $\bar{v} \mapsto \alpha^{-1}\bar{v}\alpha$, $\bar{v}' \mapsto \alpha'^{-1}\bar{v}'\alpha'$. Cela ne modifie pas le domaine d'intégration ni le terme $\bar{\xi}(\bar{v}'^{-1}\bar{v})$. Puisque e, resp. e', est invariant par α, resp. α', les termes α et α' disparaissent. Donc (3) est indépendant de a et a'. On peut intégrer cette expression sur $\omega_A(c')^2$. L'expression obtenue reste absolument convergente et on obtient

$$\mathcal{L}_{\pi,\rho}(\epsilon' \otimes e', \epsilon \otimes e) = \int_{(\bar{v}',\bar{v})\in U_{\bar{Q}}(F)^2;\bar{v}'^{-1}\bar{v}\in U(F)_c} \bar{\xi}(\bar{v}'^{-1}\bar{v}) \int_{H(F)\tilde{U}(F)_c} (\rho(h)\epsilon', \epsilon)\bar{\xi}(\tilde{u})$$

$$\int_{U_k(F)_c}(e'_{c'}(\bar{v}'),\mu(n)\tilde{\pi}(h\tilde{u})e_{c'}(\bar{v}))\bar{\xi}(n)dn\,dh\,d\tilde{u}\,d\bar{v}\,d\bar{v}',$$

où

$$e'_{c'}(\bar{v}')=mes(\omega_A(c'))^{-1}\int_{\omega_A(c')}(\mu\otimes\tilde{\pi})(a)e'(\bar{v}')da,$$

$$e_{c'}(\bar{v})=mes(\omega_A(c'))^{-1}\int_{\omega_A(c')}(\mu\otimes\tilde{\pi})(a)e(\bar{v})da.$$

Introduisons une fonctionnelle de Whittaker non nulle ϕ sur l'espace E_μ. Notons Φ : $E_\mu\otimes E_{\tilde{\pi}}\to E_{\tilde{\pi}}$ l'application $\phi\otimes id$. D'après le lemme 3.7(ii), si c est assez grand, on a l'égalité

$$\int_{U_k(F)_c}(e'_{c'}(\bar{v}'),\mu(n)\tilde{\pi}(h\tilde{u})e_{c'}(\bar{v}))\bar{\xi}(n)dn=C(\Phi e'_{c'}(\bar{v}'),\tilde{\pi}(h\tilde{u})\Phi e_{c'}(\bar{v})),$$

où C est une constante non nulle. D'après le lemme 5.1 appliqué au groupe $\tilde{G}$, si c est assez grand, on a l'égalité

$$\int_{H(F)\tilde{U}(F)_c}(\rho(h)\epsilon',\epsilon)\bar{\xi}(\tilde{u})(\Phi e'_{c'}(\bar{v}'),\tilde{\pi}(h\tilde{u})\Phi e_{c'}(\bar{v}))dh\,d\tilde{u}=\mathcal{L}_{\tilde{\pi},\rho}(\epsilon'\otimes\Phi e'_{c'}(\bar{v}'),\epsilon\otimes\Phi e_{c'}(\bar{v})).$$

On obtient

$$(4)\qquad \mathcal{L}_{\pi,\rho}(\epsilon'\otimes e',\epsilon\otimes e)=$$

$$C\int_{(\bar{v}',\bar{v})\in U_{\bar{Q}}(F)^2;\bar{v}'^{-1}\bar{v}\in U(F)_c}\mathcal{L}_{\tilde{\pi},\rho}(\epsilon'\otimes\Phi e'_{c'}(\bar{v}'),\epsilon\otimes\Phi e_{c'}(\bar{v}))\bar{\xi}(\bar{v}'^{-1}\bar{v})d\bar{v}\,d\bar{v}'.$$

Cette égalité entraîne que, si $\mathcal{L}_{\tilde{\pi},\rho}$ est nulle, $\mathcal{L}_{\pi,\rho}$ l'est aussi. Inversement, supposons $\mathcal{L}_{\tilde{\pi},\rho}$ non nulle. On peut fixer des éléments $\epsilon,\epsilon'\in E_\rho$, $\tilde{e},\tilde{e}'\in E_{\tilde{\pi}}$, $\eta,\eta'\in E_\mu$ de sorte que

$$\mathcal{L}_{\tilde{\pi},\rho}(\epsilon'\otimes\tilde{e}',\epsilon\otimes\tilde{e})\neq 0,$$

$$\phi(\eta)=\phi(\eta')=1.$$

Choisissons un sous-groupe ouvert compact Ω de $U_{\bar{Q}}(F)$ sur lequel $\bar{\xi}$ soit trivial. Introduisons l'unique fonction $e\in E_\pi$ telle que, pour $\bar{v}\in U_{\bar{Q}}(F)$, on ait l'égalité

$$e(\bar{v})=\begin{cases}\eta\otimes\tilde{e}, & \text{si } \bar{v}\in\Omega,\\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}$$

Si c' est assez grand, on a :

$$\Phi e_{c'}(\bar{v})=\begin{cases}\tilde{e}, & \text{si } \bar{v}\in\Omega,\\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}$$

Introduisons la fonction similaire $e'\in E_\pi$. L'égalité (4) entraîne

$$\mathcal{L}_{\pi,\rho}(\epsilon'\otimes e',\epsilon\otimes e)=Cmes(\Omega)^2\mathcal{L}_{\tilde{\pi},\rho}(\epsilon'\otimes\tilde{e}',\epsilon\otimes\tilde{e}).$$

Ce terme n'est pas nul, donc $\mathcal{L}_{\pi,\rho}$ n'est pas nulle.

Traitons maintenant le cas où $r<k$. On peut supposer $v_i=y_{-k+r-i}$ pour $i=1,...,r$ et $v_0=y_{r-k}+\nu_0y_{k-r}$, où $\nu_0=q_V(v_0)$. Alors $U_{\bar{Q}}\subset P$ et QPest un ouvert de Zariski de G. On a l'égalité

$$(5)\qquad \int_{Q(F)\backslash G(F)}(e'(g),e(ghu))dg=\int_{(M(F)\cap Q(F))\backslash M(F)}$$

$$\int_{(U(F)\cap Q(F))\backslash U(F)} (e'(x'm), e(x'mhu))dx'\,dm.$$

Posons $Y_0^+ = Y^+ \cap V_0$, $Q_0 = Q \cap G_0$. L'espace Y_0^+ a pour base $(y_j)_{j=1,...,k-r}$ et le groupe Q_0 est le sous-groupe parabolique des éléments de G_0 qui conservent Y_0^+. Posons $Y_W^+ = Y^+ \cap W$, $Y_W^- = Y^- \cap W$, notons Q^H le sous-groupe parabolique de H formé des éléments qui conservent Y_W^+, L^H son sous-groupe de Lévi formé des éléments qui conservent de plus Y_W^- et U_{Q^H} le radical unipotent de Q^H. L'espace Y_W^+ a pour base $(y_j)_{j=1,...,k-r-1}$. Notons W_0 l'orthogonal de $Y_W^+ \oplus Y_W^-$ dans W, H_0 son groupe spécial orthogonal et GL_{k-r-1} le groupe des automorphismes linéaires de Y_W^+. On a l'égalité $L^H = GL_{k-r-1} \times H_0$. Posons $w_0 = -\frac{1}{2\nu_0}y_{r-k} + \frac{1}{2}y_{k-r}$ et $D^H = Fw_0$. Alors W_0 est la somme directe orthogonale de $\tilde{V}$ et de D^H. Le groupe $Q_0 \cap H$ est le sous-groupe des éléments de H qui conservent Y_0^+ (disons que, pour quelques instants, on étend les scalaires à $\bar{F}$). Un tel élément conserve $Y_0^+ \cap W = Y_W^+$, donc appartient à Q^H. Soit $h \in Q^H$. Pour qu'il conserve Y_0^+, il doit envoyer y_{k-r} dans Y_0^+. Mais il fixe v_0 et on a $w_0 = -\frac{1}{2\nu_0}v_0 + y_{k-r}$. On a donc $hw_0 \in w_0 + Y_0^+$. Puisque hw_0 et w_0 appartiennent à W, cela force $hw_0 \in w_0 + Y_W^+$. La réciproque est similaire. Donc $Q_0 \cap H$ est le sous-groupe des $h \in Q^H$ tels que $hw_0 \in w_0 + Y_W^+$. Autrement dit

$$Q_0 \cap H = GL_{k-r-1}\tilde{G}U_{Q^H}.$$

On vérifie que la restriction du module δ_{Q_0} au groupe $Q_0(F) \cap H(F)$ est égale au module de ce groupe : si on écrit un élément $h \in Q_0(F) \cap H(F)$ sous la forme $\delta\tilde{g}n$, avec $\delta \in GL_{k-r-1}(F)$, $\tilde{g} \in \tilde{G}(F)$, $n \in U_{Q^H}(F)$, ces modules coïncident avec $|det(\delta)|_F^{d_{\tilde{V}}+k-r-1}$. L'application naturelle $Q_0(F)\backslash G_0(F) \to (M(F) \cap Q(F))\backslash M(F)$ est un isomorphisme. Le groupe $H(F)$ agit sur l'ensemble des sous-espaces isotropes de V_0 de dimension $k-r$. Il y a deux orbites : l'orbite ouverte des sous-espaces dont l'intersection avec W est de dimension $k-r-1$ et l'orbite fermée des sous-espaces contenus dans W. L'espace Y_0^+ appartient à l'orbite ouverte. Il en résulte que l'application naturelle $(Q_0(F) \cap H(F))\backslash H(F) \to Q_0(F)\backslash G_0(F)$ est injective et a pour image un ouvert de l'espace d'arrivée dont le complémentaire est de mesure nulle. On en déduit aisément l'assertion suivante. Soit $\varphi : G_0(F) \to \mathbb{C}$ une fonction telle que $\varphi(qg) = \delta_{Q_0}(q)\varphi(g)$ pour tous $q \in Q_0(F)$, $g \in G_0(F)$. Supposons φ absolument intégrable sur $Q_0(F)\backslash G_0(F)$. Alors la restriction de φ à $H(F)$ est absolument intégrable sur $(Q_0(F) \cap H(F))\backslash H(F)$ et on a l'égalité

$$\int_{Q_0(F)\backslash G_0(F)} \varphi(g)dg = \int_{(Q_0(F)\cap H(F))\backslash H(F)} \varphi(h)dh.$$

Dans l'égalité (5), on peut donc remplacer l'intégration sur $(M(F) \cap Q(F))\backslash M(F)$ par une intégration sur $(Q_0(F) \cap H(F))\backslash H(F)$. On obtient

$$\int_{Q(F)\backslash G(F)} (e'(g), e(ghu))dg = \int_{(Q_0(F)\cap H(F)\backslash H(F)} \int_{(U(F)\cap Q(F))\backslash U(F)} (e'(x'h'), e(x'h'hu))dx'\,dh',$$

puis

$$\mathcal{L}_{\pi,\rho}(\epsilon' \otimes e', \epsilon \otimes e) = \int_{H(F)U(F)_c} \int_{(Q_0(F)\cap H(F))\backslash H(F)}$$

$$\int_{(U(F)\cap Q(F))\backslash U(F)} (\rho(h)\epsilon', \epsilon)(e'(x'h'), e(x'h'hu))\bar{\xi}(u)dx'\,dh'\,du\,dh.$$

On effectue les changements de variables $u \mapsto (h'h)^{-1}uh'h$, puis $h \mapsto h'^{-1}h$, on décompose ensuite l'intégrale sur $H(F)$ en une intégrale composée d'une intégrale sur $Q_0(F)\cap H(F)$ et d'une intégrale sur $(Q_0 \cap H(F))\backslash H(F)$ (la mesure sur $Q_0(F)\cap H(F)$ doit être une mesure de Haar à gauche). On obtient

$$\mathcal{L}_{\pi,\rho}(\epsilon'\otimes e', \epsilon\otimes e) = \int_{((Q_0(F)\cap H(F))\backslash H(F))^2}\int_{Q_0(F)\cap H(F)}\int_{(U(F)\cap Q(F))\backslash U(F)}$$

$$\int_{U(F)_c}(\rho(qh)\epsilon', \rho(h')\epsilon)(e'(x'h'), e(x'uqh))\bar{\xi}(u)du\, dx'\, dq\, dh\, dh',$$

On effectue le changement de variable $u \mapsto x'^{-1}u$ puis on décompose l'intégrale en $u \in U(F)$ en composée d'une intégrale sur $u \in U(F)\cap Q(F)$ et d'une intégrale sur $x \in (U(F)\cap Q(F))\backslash U(F)$. Remarquons que $U(F)\cap Q(F) = U(F)\cap L(F) = U(F)\cap GL_k(F)$. La condition initiale $u \in U(F)_c$ est remplacée par $x'^{-1}ux \in U(F)_c$. Notons $\varphi_c(u,x,x')$ la fonction caractéristique de l'ensemble des (u,x,x') vérifiant cette condition. On obtient

$$\mathcal{L}_{\pi,\rho}(\epsilon'\otimes e', \epsilon\otimes e) = \int_{((Q_0(F)\cap H(F))\backslash H(F))^2}\int_{Q_0(F)\cap H(F)}\int_{((U(F)\cap Q(F))\backslash U(F))^2}$$

$$\int_{U(F)\cap GL_k(F)}(\rho(qh)\epsilon', \rho(h')\epsilon)(e'(x'h'), e(uxqh))\varphi_c(u,x,x')\bar{\xi}(x'^{-1}ux)du\, dx\, dx'\, dq\, dh\, dh'.$$

On effectue le changement de variable $x \mapsto qxq^{-1}$: cette conjugaison préserve à la fois $U(F)$ et $U(F)\cap Q(F)$. Les termes $\bar{\xi}(x)$ et $\varphi_c(u,x,x')$ ne dépendent de x que par l'intérmédiaire des coefficients $q_V(xv_i, v_{-i-1})$pour $i = 1,...,r-1$. Puisque q fixe les vecteurs v_i, la conjugaison par q ne change pas ces termes. Par contre, elle introduit un module. Pour l'exprimer commodément et pour poursuivre notre calcul, on décompose q en $\delta n\tilde{g}$, où $\delta \in GL_{k-r-1}(F)$, $n \in U_{Q^H}(F)$ et $\tilde{g} \in \tilde{G}(F)$. Le module est alors $|det(\delta)|_F^{-r}$. On obtient

$$\mathcal{L}_{\pi,\rho}(\epsilon'\otimes e', \epsilon\otimes e) = \int_{((Q_0(F)\cap H(F))\backslash H(F))^2}\int_{((U(F)\cap Q(F))\backslash U(F))^2}\int_{\tilde{G}(F)}\int_{U_{Q^H}(F)}\int_{GL_{k-r-1}(F)}$$

$$\int_{U(F)\cap GL_k(F)}(\rho(\delta n\tilde{g}h)\epsilon', \rho(h')\epsilon)(e'(x'h'), e(u\delta n\tilde{g}xh))\varphi_c(u,x,x')$$

$$\bar{\xi}(x'^{-1}ux)|det(\delta)|_F^{-r}du\, d\delta\, dn\, d\tilde{g}\, dx\, dx'\, dh\, dh'.$$

On a l'égalité $U(F) = (U(F)\cap Q(F))\times(U(F)\cap U_{\bar{Q}}(F)$ qui permet de remplacer l' intégration sur $(U(F)\cap Q(F))\backslash U(F)$ par une intégration sur $U(F)\cap U_{\bar{Q}}(F)$. On va légèrement modifier cet ensemble de représentants. Soit $x \in U(F)\cap U_{\bar{Q}}(F)$. Pour $i = 1,...,r-1$, on a

$$q_V(xv_i, v_{-i-1}) = q_V(xy_{-k+r-i}, y_{k-r+i+1}) = q_V(y_{-k+r-i}, y_{k-r+i+1}) = 0$$

puisque x fixe y_{-k+r-i}. Par contre, $q_V(xv_0, v_{-1})$ n'est en général pas nul. Exprimons matriciellement les éléments de GL_k dans la base $(y_j)_{j=1,...,k}$ de Y^+. Remarquons que le groupe $U\cap GL_k$ est le radical unipotent du sous-groupe parabolique de GL_k triangulaire supérieur par blocs, de blocs $k-r$, 1,...,1. Pour $u \in U(F)\cap GL_k(F)$, on calcule aisément

$$q_V(uv_i, v_{-i-1}) = -u_{k-r+i,k-r+i+1}$$

pour $i = 0, ..., r-1$. Pour $x \in U(F) \cap U_{\bar{Q}}(F)$, notons $u(x)$ l'élément de $U(F) \cap GL_k(F)$ dont toutes les coordonnées non diagonales sont nulles, sauf $u(x)_{k-r,k-r+1}$ qui vaut $q_V(xv_0, v_{-1})$. Posons $x_* = u(x)x$. Alors $q_V(x_*v_i, v_{-i-1}) = 0$ pour tout $i = 0, ..., r-1$ et $\{x_*; x \in U(F) \cap U_{\bar{Q}}(F)\}$ est encore un ensemble de représentants de $(U(F) \cap Q(F))\backslash U(F)$. Pour $x, x' \in U(F) \cap U_{\bar{Q}}(F)$ et $u \in U(F) \cap GL_k(F)$, on a $\bar{\xi}(x_*'^{-1}ux_*) = \bar{\xi}(u)$ et $\varphi_c(u, x_*, x_*') = 1$ si et seulement si $u \in U_k(F)_c$. On obtient

$$(6) \qquad \mathcal{L}_{\pi,\rho}(\epsilon' \otimes e', \epsilon \otimes e) = \int_{((Q_0(F)\cap H(F))\backslash H(F))^2} \int_{(U(F)\cap U_{\bar{Q}}(F))^2}$$

$$I(x', h', x, h) dx\, dx'\, dh\, dh',$$

où

$$I(x', h', x, h) = \int_{\tilde{G}(F)} \int_{U_{Q^H}(F)} \int_{GL_{k-r-1}(F)} \int_{U(F)\cap U_k(F)_c} (\rho(\delta n\tilde{g}h)\epsilon', \rho(h')\epsilon)$$

$$(e'(x_*'h'), e(u\delta n\tilde{g}x_*h))\bar{\xi}(u)|det(\delta)|_F^{-r} du\, d\delta\, dn\, d\tilde{g}.$$

Toutes ces expressions sont absolument convergentes d'après (1) : on n'a jusqu'ici effectué que des changements de variables et des permutations d'intégrales.

On va calculer $I(x', h', x, h)$. Fixons un sous-groupe compact spécial K^Hde $H(F)$ en bonne position relativement au sous-groupe parabolique Q^H. L'application naturelle de K^H dans $Q^H(F)\backslash H(F)$ est surjective. D'après la description que l'on a donnée ci-dessus du groupe $Q_0 \cap H$, tout élément de$(Q_0(F) \cap H(F))\backslash H(F)$ a un représentant qui appartient à $H_0(F)K^H$. On peut donc se limiter à calculer $I(x', h', x, h)$ pour des éléments $x, x' \in U(F) \cap U_{\bar{Q}}(F)$ et $h, h' \in H_0(F)K^H$. Dans l'expression de $I(x', h', x, h)$, on peut remplacer $e(u\delta n\tilde{g}x_*h)$ par $\mu(u)e(\delta n\tilde{g}x_*h)$. D'après les formules écrites ci-dessus, $\bar{\xi}(u) = \psi(-\sum_{j=k-r,...,k-1} u_{j,j+1})$. Fixons une fonctionnelle de Whittaker ϕ non nulle sur E_μ et notons comme plus haut $\Phi : E_\mu \otimes_{\mathbb{C}} E_{\tilde{\pi}} \to E_{\tilde{\pi}}$ l'application $\phi \otimes id$. On peut appliquer le lemme 3.7(ii) : il existe une constante $C \neq 0$ telle que

$$\int_{U(F)\cap U_k(F)_c} (e'(x_*'h'), \mu(u)e(\delta n\tilde{g}x_*h))\bar{\xi}(u)du =$$

$$C \int_{U_{k-r-1}(F)\backslash GL_{k-r-1}(F)\times\omega_{[k-r]}(c+c_\psi)} (\Phi\mu(\gamma a)e'(x_*'h'), \Phi\mu(\gamma a)e(\delta n\tilde{g}x_*h))|det(\gamma)|_F^{-r} da\, d\gamma,$$

pourvu que $c + c_\psi \geq 1$. On peut remplacer $\mu(\gamma a)e(\delta n\tilde{g}x_*h)$ par

$$\mu(\gamma\delta a)e(n\tilde{g}x_*h)\delta_Q(\delta)^{1/2} = \mu(\gamma\delta a)e(n\tilde{g}x_*h)|det(\delta)|_F^{(d_{\tilde{V}}+k-1)/2}.$$

On obtient

$$I(x', h', x, h) = C \int_{\tilde{G}(F)} \int_{U_{Q^H}(F)} \int_{GL_{k-r-1}(F)}$$

$$\int_{U_{k-r-1}(F)\backslash GL_{k-r-1}(F)\times\omega_{[k-r]}(c+c_\psi)} (\rho(\delta n\tilde{g}h)\epsilon', \rho(h')\epsilon)(\Phi\mu(\gamma a)e'(x_*'h'), \Phi\mu(\gamma\delta a)e(n\tilde{g}x_*h))$$

$$|det(\gamma)|_F^{-r}|det(\delta)|_F^{-r+(d_{\tilde{V}}+k-1)/2} da\, d\gamma\, d\delta\, dn\, d\tilde{g}.$$

Montrons que

(7) pour $\tilde{g}$ et n fixés, l'intégrale intérieure sur $GL_{k-r-1}(F)\times(U_{k-r-1}(F)\backslash GL_{k-r-1}(F))\times\omega_{[k-r]}(c+c_\psi)$ est absolument convergente.

La variable $a\in \omega_{[k-r]}(c+c_{\psi})$ disparaît tout de suite : la fonction que l'on intègre est localement constante en cette variable et le domaine d'intégration est compact. On a une majoration

$$|(\rho(\delta n\tilde{g}h)\epsilon',\rho(h')\epsilon)| << \Xi^H(\delta).$$

On peut décomposer $e'(x'_*h')$ et $e(n\tilde{g}x_*h)$ en combinaisons linéaires de produits $\eta\otimes\tilde{e}$, où $\eta\in E_{\mu}$ et $\tilde{e}\in E_{\tilde{\pi}}$. Cela nous ramène à montrer que, pour $\eta,\eta'\in E_{\mu}$, l'intégrale

$$\int_{GL_{k-r-1}(F)}\int_{U_{k-r-1}(F)\backslash GL_{k-r-1}(F)}\Xi^H(\delta)|\phi\mu(\gamma)\eta'||\phi\mu(\gamma\delta)\eta|$$

$$|det(\gamma)|_F^{-r}|det(\delta)|_F^{-r+(d_{\tilde{V}}+k-1)/2}d\gamma\, d\delta$$

est convergente. On effectue le changement de variable $\delta\mapsto\gamma^{-1}\delta$. On remplace ensuite la variable γ par $t'k'$, avec $t'\in A_{k-r-1}(F)$ et $k'\in K_{k-r-1}$ et δ par tuk, avec $t\in A_{k-r-1}(F)$, $u\in U_{k-r-1}(F)$, $k\in K_{k-r-1}$. Cela remplace $d\gamma\, d\delta$ par $\delta_{B_{k-r-1}}(t')^{-1}dt'\,dk'\,dt\,du\,dk$. De nouveau, les intégrales en k et k' sont inessentielles et on est ramené à l'intégrale

$$(8)\qquad \int_{U_{k-r-1}(F)}\int_{A_{k-r-1}(F)^2}\Xi^H(t'^{-1}tu)|\phi\mu(t')\eta'||\phi\mu(t)\eta|\delta_{B_{k-r-1}}(t')^{-1}$$

$$|det(t')|_F^{(1-d_{\tilde{V}}-k)/2}|det(t)|_F^{-r+(d_{\tilde{V}}+k-1)/2}dt\,dt'\,du.$$

Montrons que

(9) pour tous réels $R>0$ et ϵ avec $0<\epsilon<1/2$, on a une majoration

$$\Xi^H(g) << \Xi^{GL_{k-r-1}}(g)\sigma(g)^{-R}|det(g)|_F^{\epsilon+(r+1-d_{\tilde{V}}-k)/2}$$

pour tout $g\in GL_{k-r-1}(F)$.

On peut supposer $g=a\in A_{k-r-1}(F)$. Notons a_j, pour $j=1,...,k-r-1$, les coefficients diagonaux de a. Choisissons un sous-groupe de Lévi minimal M_{min} de H contenant A_{k-r-1} et un sous-groupe parabolique minimal $P_{min}\in\mathcal{P}(M_{min})$ tel que a soit "négatif " pour P_{min}, c'est-à-dire que $|\alpha(a)|\leq 1$ pour toute racine α de $A_{M_{min}}$ dans $\mathfrak{u}_{P_{min}}$. D'après [W2] lemme II.1.1, on a des inégalités

$$(10)\qquad \delta_{P_{min}}(a) << \Xi^H(a)^2 << \delta_{P_{min}}(a)\sigma(a)^D$$

où D est un certain entier. On énumère les valeurs de $\alpha(a)$ pour toutes les racines α de $A_{M_{min}}$ dans $\mathfrak{h}$: ce sont $a_ja_{j'}^{-1}$ pour $j\neq j'$, $a_ja_{j'}$ et $(a_ja_{j'})^{-1}$ pour $j<j'$, qui interviennent avec multiplicité 1, et a_j et a_j^{-1} qui interviennent avec multiplicité $d_{W_0}=d_{\tilde{V}}+1$ (évidemment, les j, j' parcourent $\{1,...,k-r-1\}$). Le module $\delta_{P_{min}}(a)$ est le produit de celles des valeurs absolues de ces termes qui sont inférieures ou égales à 1. Donc

$$\delta_{P_{min}}(a)=I_1I_2I_3,$$

où

$$I_1=\prod_{j\neq j';val_F(a_j)\geq val_F(a_{j'})}|a_ja_{j'}^{-1}|_F;$$

$$I_2=(\prod_{j<j';val_F(a_ja_{j'})\geq 0}|a_ja_{j'}|_F)(\prod_{j<j';val_F(a_ja_{j'})<0}|a_ja_{j'}|_F^{-1});$$

$$I_3=(\prod_{j;val_F(a_j)\geq 0}|a_j|^{d_{\tilde{V}}+1})(\prod_{j;val_F(a_j)\leq 0}|a_j|_F^{-d_{\tilde{V}}-1}).$$

On peut majorer le premier produit de I_2 par son inverse. On obtient

$$I_2\leq \prod_{j<j'}|a_ja_{j'}|_F^{-1}=|det(a)|_F^{r+2-k}.$$

On a $I_3=I_4I_5$, où

$$I_4=(\prod_{j;val_F(a_j)\geq 0}|a_j|_F^{2\epsilon})(\prod_{j;val_F(a_j)\leq 0}|a_j|_F^{-2\epsilon}),$$

$$I_5=(\prod_{j;val_F(a_j)\geq 0}|a_j|_F^{d_{\tilde{V}}+1-2\epsilon})(\prod_{j;val_F(a_j)\leq 0}|a_j|_F^{-d_{\tilde{V}}-1+2\epsilon}).$$

Comme ci-dessus, le premier produit de I_5 est majoré par son inverse, d'où

$$I_5\leq \prod_j|a_j|_F^{-d_{\tilde{V}}-1+2\epsilon}=|det(a)|_F^{-d_{\tilde{V}}-1+2\epsilon}.$$

On a $I_4=q^{-2\epsilon b}$ où

$$b=\sum_j|val_F(a_j)|>>\sigma(a),$$

donc $I_4<<q^{-2\epsilon\sigma(a)}$. D'où, en utilisant la seconde majoration de (9),

$$\Xi^H(a)^2<<\sigma(a)^Dq^{-2\epsilon\sigma(a)}|det(a)|_F^{r+1-d_{\tilde{V}}-k+2\epsilon}I_1.$$

Un calcul similaire vaut en remplaçant le groupe H par GL_{k-r-1}. En utilisant cette fois la première majoration de (10), on obtient simplement

$$I_1<<\Xi^{GL_{k-r-1}}(a)^2.$$

De ces deux majorations se déduit l'assertion (9).

De (9) et de la proposition II.4.5 de [W2] se déduit que l'intégrale

$$\int_{U_{k-r-1}(F)}\Xi^H(t'^{-1}tu)du$$

est convergente et que, pour tout ϵ tel que $0<\epsilon<1/2$,elle est bornée par

$$\delta_{B_{k-r-1}}(t'^{-1}t)^{-1/2}|det(t'^{-1}t)|_F^{\epsilon+(r+1-d_{\tilde{V}}-k)/2}.$$

Pour tout entier $c'\in\mathbb{N}$, on a introduit en 3.5 la fonction $\iota_{c'}$ sur $A_k(F)$. D'après le lemme 3.7(i), il existe un entier $c'\in\mathbb{N}$ et un réel $R\geq 0$ tels que l'on ait la majoration

$$|\phi\mu(a)\eta|<<\iota_{c'}(a)\delta_{B_k}(a)^{1/2}\sigma(a)^R$$

pour tout $a\in A_k(F)$. Pour $t\in A_{k-r-1}(F)$, on a $\delta_{B_k}(t)=\delta_{B_{k-r-1}}(t)|det(t)|_F^{r+1}$, d'où

$$(11)\qquad |\phi\mu(t)\eta|<<\iota_{c'}(t)\delta_{B_{k-r-1}}(t)^{1/2}|det(t)|_F^{(r+1)/2}\sigma(t)^R.$$

La fonction $g \mapsto \phi\mu(g)\eta'$ vérifie une majoration analogue. L'expression (8) est donc majorée par le produit des intégrales

$$\int_{A_{k-r-1}(F)} \iota_{c'}(t')|det(t')|_F^{-\epsilon+1/2}\sigma(t')^R dt'$$

et

$$\int_{A_{k-r-1}(F)} \iota_{c'}(t)|det(t)|_F^{\epsilon+1/2}\sigma(t)^R dt.$$

Considérons par exemple la première. On remplace les variables $t'_1, ..., t'_{k-r-1}$ par $a_1....a_{k-r-1}$, $a_2...a_{k-r-1}, ..., a_{k-r-1}$. L'intégrale est alors essentiellement bornée par le produit sur $j = 1, ..., k-r-1$ des intégrales

$$\int_{a_j \in F^\times; val_F(a_j) \geq -c'} |a_j|_F^{j(-\epsilon+1/2)}(1 + |val_F(a_j)|)^R da_j.$$

Chacune d'elles est convergente, ce qui achève la preuve de (7).

On utilise (7) pour permuter les deux intégrales intérieures dans l'expression qui précède cette assertion. On effectue ensuite le changement de variables $\delta \mapsto \gamma^{-1}\delta$, puis on décompose γ en $t'k'$ et δ en utk, avec $u \in U_{k-r-1}(F)$, $t, t' \in A_{k-r-1}(F)$ et $k, k' \in K_{k-r-1}$. Cela change $d\gamma\, d\delta$ en $\delta_{B_{k-r-1}}(tt')^{-1} du\, dt\, dt'\, dk\, dk'$. On obtient

$$I(x', h', x, h) = C \int_{\tilde{G}(F)} I(x', h', x, h, \tilde{g}) d\tilde{g}$$

où

$$I(x', h', x, h, \tilde{g}) = \int_{U_{Q^H}(F)} \int_{\omega_{[k-r]}(c+c_\psi)} \int_{K^2_{k-r-1}} \int_{A_{k-r-1}(F)^2} \int_{U_{k-r-1}(F)}$$
$$(\rho(utkn\tilde{g}h)\epsilon', \rho(t'k'h')\epsilon)(\Phi\mu(t'k'a)e'(x'_*h'), \Phi\mu(utka)e(n\tilde{g}x_*h))$$
$$|det(t')|_F^{(1-d_{\tilde{V}}-k)/2}|det(t)|_F^{-r+(d_{\tilde{V}}+k-1)/2}\delta_{B_{k-r-1}}(tt')^{-1} du\, dt\, dt'\, dk\, dk'\, da\, dn.$$

Fixons une suite $(\Omega_l)_{l\in\mathbb{N}}$ de sous-groupes ouverts compacts de $U_{Q^H}(F)$ telle que $\Omega_l \subset \Omega_{l+1}$ pour tout l,

$$\bigcup_{l\in\mathbb{N}} \Omega_l = U_{Q^H}(F)$$

et tout Ω_l soit invariant par conjugaison par K_{k-r-1}. Notons $I_l(x', h', x, h, \tilde{g})$ l'expression obtenue en remplaçant dans $I(x', h', x, h, \tilde{g})$ la première intégrale sur $U_{Q^H}(F)$ par l'intégrale sur Ω_l. On a

$$I(x', h', x, h, \tilde{g}) = lim_{l\to\infty} I_l(x', h', x, h, \tilde{g}).$$

Fixons $l \in \mathbb{N}$. En (7), on avait fixé n. Mais, les fonctions considérées étant localement constantes en cette variable, on aurait aussi bien pu l'autoriser à varier dans un sous-ensemble compact de $U_{Q^H}(F)$ et on aurait obtenu une majoration uniforme en n de l'intégrale considérée. Donc l'expression $I_l(x', h', x, h, \tilde{g})$ est absolument convergente. On peut changer l'ordre des intégrales puis effectuer le changement de variable $n \mapsto (tk)^{-1}ntk$. Cela introduit le module $\delta_{Q^H}(t)^{-1} = |det(t)|_F^{r+1-k-d_{\tilde{V}}}$. On obtient

$$I_l(x', h', x, h, \tilde{g}) = \int_{\omega_{[k-r]}(c+c_\psi)} \int_{K^2_{k-r-1}} \int_{A_{k-r-1}(F)^2} \int_{t\Omega_l t^{-1}} \int_{U_{k-r-1}(F)}$$

$$(\rho(untk\tilde{g}h)\epsilon', \rho(t'k'h')\epsilon)(\Phi\mu(t'k'a)e'(x'_*h'), \Phi\mu(utka)e((tk)^{-1}ntk\tilde{g}x_*h))$$
$$|det(tt')|_F^{(1-d_{\tilde{V}}-k)/2}\delta_{B_{k-r-1}}(tt')^{-1}du\,dn\,dt\,dt'\,dk\,dk'\,da.$$

Soit $n \in U_{Q^H}(F)$. On a $nw_0 \in w_0 + Y_W^+$. Introduisons l'élément $u(n) \in U_k(F)$ qui fixe tous les vecteurs y_j pour $j = 1, ..., k$, $j \neq k-r$, et envoie y_{k-r} sur $y_{k-r} + nw_0 - w_0$. On a

(12) $u(n)^{-1}n \in U_{Q_0}(F)$.

En effet, $u(n)^{-1}n$ fixe tout y_j pour $j = 1, ..., k-r-1$ et envoie $\tilde{V}$ dans Y_W^+, a fortiori dans Y_0^+. Pour qu'il appartienne à $U_{Q_0}(F)$, il suffit qu'il fixe de plus y_{k-r}. On a $y_{k-r} = w_0 + \frac{1}{2\nu_0}v_0$, donc $ny_{k-r} = nw_0 + \frac{1}{2\nu_0}v_0 = y_{k-r} + nw_0 - w_0$, puis $u(n)^{-1}ny_{k-r} = u(n)^{-1}y_{k-r} + nw_0 - w_0 = y_{k-r}$. Cela prouve (12).

Puisque e est invariante à gauche par $U_Q(F)$, a fortiori par $U_{Q_0}(F)$, on a

$$\mu(utka)e((tk)^{-1}ntk\tilde{g}x_*h) = \delta_Q(tk)^{-1/2}\mu(uau(n))e(u(n)^{-1}ntk\tilde{g}x_*h)$$
$$= \delta_Q(tk)^{-1/2}\mu(uau(n))e(tk\tilde{g}x_*h) = \mu(uau(n)tk)e(\tilde{g}x_*h).$$

Introduisons le sous-groupe parabolique P^H de H, contenu dans Q^H, dont l'intersection avec L^H est $B_{k-r-1} \times H_0$. Son radical unipotent est $U_{P^H} = U_{k-r-1} \times U_{Q^H}$. On définit un caractère $\bar{\xi}^H$ de $U_{P^H}(F)$ par la formule

$$\bar{\xi}^H(\nu) = \psi(q_W(\nu w_0, y_{r-k+1}) + \sum_{j=2,...,k-r-1} q_W(\nu y_j, y_{-j+1}))$$

pour $\nu \in U_{P^H}(F)$. Remarquons que les données H, P^H, w_0, $\bar{\xi}^H$, $\tilde{G}$ sont d'exactes similaires des données G, P, v_0, $\bar{\xi}$, H. Plus généralement, pour $a \in \omega_{[k-r]}(c+c_\psi)$, définissons un caractère $\bar{\xi}_a^H$ de $U_{P^H}(F)$ par

$$\bar{\xi}_a^H(\nu) = \psi(a_{k-r}^{-1}q_W(\nu w_0, y_{r-k+1}) + \sum_{j=2,...,k-r-1} q_W(\nu y_j, y_{-j+1})).$$

Si $\nu = un$, avec $u \in U_{k-r-1}(F)$ et $n \in U_{Q^H}(F)$, on a l'égalité

$$\bar{\xi}_a^H(un) = \psi(a_{k-r}^{-1}u(n)_{k-r-1,k-r} + \sum_{j=1,...k-r-2} u_{j,j+1}).$$

D'après la définition de Φ, on en déduit

$$\Phi\mu(uau(n)tk)e(\tilde{g}x_*h) = \bar{\xi}_a^H(un)\Phi\mu(tka)e(\tilde{g}x_*h) = \bar{\xi}_a^H(un)\tilde{\pi}(\tilde{g})\Phi\mu(tka)e(x_*h).$$

puis

$$(13) \qquad I_l(x', h', x, h, \tilde{g}) = \int_{\omega_{[k-r]}(c+c_\psi)} \int_{K_{k-r-1}^2} \int_{A_{k-r-1}(F)^2} \int_{t\Omega_l t^{-1}} \int_{U_{k-r-1}(F)}$$
$$(\rho(untk\tilde{g}h)\epsilon', \rho(t'k'h')\epsilon)(\Phi\mu(t'k'a)e'(x'_*h'), \tilde{\pi}(\tilde{g})\Phi\mu(tka)e(x_*h))\bar{\xi}_a^H(un)$$
$$|det(tt')|_F^{(1-d_{\tilde{V}}-k)/2}\delta_{B_{k-r-1}}(tt')^{-1}du\,dn\,dt\,dt'\,dk\,dk'\,da.$$

Pour un entier $c' \geq 1$, on introduit le sous-groupe $\omega_{A_{k-r-1}}(c') \subset A_{k-r-1}(F)$. Montrons que

(14) il existe un entier $c' \geq 1$ tel que, pour tous $t, t' \in A_{k-r-1}(F)$, $k, k' \in K_{k-r-1}$, $h, h' \in H_0(F)K^H$ et $\tilde{g} \in \tilde{G}(F)$, les éléments $\rho(tk\tilde{g}h)\epsilon'$ et $\rho(t'k'h')\epsilon$ de E_ρ soient invariants par $\rho(\alpha)$ pour tout $\alpha \in \omega_{A_{k-r-1}}(c')$.

Ecrivons $h = h_0\kappa$, avec $h_0 \in H_0(F)$ et $\kappa \in K^H$. Soit $\alpha \in A_{k-r-1}(F)$. En utilisant le fait que G_{k-r-1} commute à H_0, a fortiori à $\tilde{G}$, on a

$$\alpha tk\tilde{g}h = tk\tilde{g}h\gamma$$

où $\gamma = (k\kappa)^{-1}\alpha k\kappa$. Puisque $k\kappa$ reste dans un ensemble compact, il existe c' tel que la condition $\alpha \in \omega_{A_{k-r-1}}(c')$ entraîne que $\rho(\gamma)$ fixe ϵ', donc que $\rho(\alpha)$ fixe $\rho(tk\tilde{g}h)\epsilon'$. La preuve est la même pour l'élément $\rho(t'k'h')\epsilon$. Cela prouve (14).

On fixe c' comme en (14). Les deux intégrales intérieures de la formule (13) se regroupent en une intégrale sur le sous-ensemble $U_{k-r-1}(F) \times t\Omega_l t^{-1}$ de $U_{P^H}(F)$. Introduisons le sous-groupe $U_{P^H}(F)_{c'}$ de ce dernier groupe. Posons $\Delta_l(t) = U_{P^H}(F)_{c'} \cap (U_{k-r-1}(F) \times t\Omega_l t^{-1})$. La preuve du lemme 3.5 montre que l'intégrale sur le complémentaire de $\Delta_l(t)$ dans $U_{k-r-1}(F) \times t\Omega_l t^{-1}$ est nulle. On peut donc remplacer les deux intégrales intérieures de (13) par l'intégrale sur $\Delta_l(t)$. Remarquons que c' est indépendant de c, on peut donc supposer que c est assez grand relativement à c'. Alors, pour $a \in \omega_{[k-r]}(c+c_\psi)$, le caractère $\bar{\xi}^H_a$ coïncide avec $\bar{\xi}^H$ sur $U_{P^H}(F)_{c'}$. On obtient

$$I_l(x', h', x, h) = \int_{\tilde{G}(F)} \int_{\omega_{[k-r]}(c+c_\psi)} \int_{K^2_{k-r-1}} \int_{A_{k-r-1}(F)^2} \int_{\Delta_l(t)}$$

$$(\rho(utk\tilde{g}h)\epsilon', \rho(t'k'h')\epsilon)(\Phi\mu(t'k'a)e'(x'_*h'), \tilde{\pi}(\tilde{g})\Phi\mu(tka)e(x_*h))\bar{\xi}^H(u)$$

$$|det(tt')|_F^{(1-d_{\tilde{V}}-k)/2}\delta_{B_{k-r-1}}(tt')^{-1}du\, dt\, dt'\, dk\, dk'\, da\, d\tilde{g}.$$

Montrons que

(15) l'expression obtenue en remplaçant ci-dessus l'intégrale sur $\Delta_l(t)$ par l'intégrale sur $U_{P^H}(F)_{c'}$ est absolument convergente.

Comme toujours, les intégrales sur $\omega_{[k-r]}(c+c_\psi)\times K^2_{k-r-1}$ sont inessentielles. Oublions-les. On peut supposer $e(x_*h) = \eta \otimes \tilde{e}$ et $e'(x'_*h') = \eta' \otimes \tilde{e}'$, avec $\eta, \eta' \in E_\mu$ et $\tilde{e}, \tilde{e}' \in E_{\tilde{\pi}}$. On a les majorations

$$|(\rho(ut\tilde{g}h)\epsilon', \rho(t'h')\epsilon)| << \Xi^H(t'^{-1}ut\tilde{g}),$$

$$|(\Phi\mu(t'k'a)e'(x'_*h'), \tilde{\pi}(\tilde{g})\Phi\mu(tka)e(x_*h))| << \Xi^{\tilde{G}}(\tilde{g})|\phi\mu(t')\eta'||\phi\mu(t)\eta|.$$

On peut encore majorer cette dernière expression grâce à (11) : il existe un entier c'' et un réel $R \geq 0$ tels que

$$|(\Phi\mu(t'k'a)e'(x'_*h'), \tilde{\pi}(\tilde{g})\Phi\mu(tka)e(x_*h))| << \Xi^{\tilde{G}}(\tilde{g})\iota_{c''}(t)\iota_{c''}(t')$$

$$\delta_{B_{k-r-1}}(tt')^{1/2}|det(tt')|_F^{(r+1)/2}\sigma(t)^R\sigma(t')^R.$$

On effectue le changement de variable $u \mapsto t'ut'^{-1}$, qui introduit le module $\delta_{P^H}(t')$, on est ramené à l'expression

$$\int_{\tilde{G}(F)} \int_{A_{k-r-1}(F)^2} \int_{t'^{-1}U_{P^H}(F)_{c'}t'} \Xi^H(ut'^{-1}t\tilde{g})\Xi^{\tilde{G}}(\tilde{g})\iota_{c''}(t)\iota_{c''}(t')$$

$$\delta_{B_{k-r-1}}(tt')^{-1/2}\delta_{P^H}(t')|det(tt')|_F^{(1+(r-d_{\tilde{V}}-k)/2}\sigma(t)^R\sigma(t')^R du\, dt\, dt'\, d\tilde{g}.$$

Pour $t' \in A_{k-r-1}(F)$, dont on écrit les coefficients diagonaux $t'_1, ..., t'_{k-r-1}$, posons

$$c'(t') = sup\{c', c'+val_F(t_1)-val_F(t_2), ..., c'+val_F(t_{k-r-2})-val_F(t_{k-r-1}), c'+val_F(t_{k-r-1})\}.$$

Alors $t'^{-1}U_{P^H}(F)_{c'}t' \subset U_{P^H}(F)_{c'(t')}$ et on peut remplacer dans l'expression ci-dessus l'intégrale sur $t'^{-1}U_{P^H}(F)_{c'}t'$ par l'intégrale sur $U_{P^H}(F)_{c'(t')}$. D'après 4.3(3), il existe un réel $R' \geq 0$ tel que

$$\int_{U_{P^H}(F)_{c'(t')}} \Xi^H(ut'^{-1}t\tilde{g})du << \delta_{P^H}(tt'^{-1})^{1/2}\Xi^{H_0}(\tilde{g})\sigma(\tilde{g})^{R'}\sigma(tt'^{-1})^{R'}c'(t')^{R'}.$$

On peut aussi bien remplacer $\sigma(tt'^{-1})^{R'}c'(t')^{R'}$ par $\sigma(t)^{R'}\sigma(t')^{R'}$. On a

$$\delta_{P^H}(tt') = \delta_{B_{k-r-1}}(tt')|det(tt')|_F^{d_{\tilde{V}}+k-r-1}.$$

Alors notre expression est majorée par le produit de trois intégrales. La première est

$$\int_{\tilde{G}(F)} \Xi^{H_0}(\tilde{g})\Xi^{\tilde{G}}(\tilde{g})\sigma(\tilde{g})^{R'}d\tilde{g},$$

qui est convergente d'après 4.3(4). Les deux autres sont toutes deux égales à

$$\int_{A_{k-r-1}(F)} \iota_{c''}(t)|det(t)|_F^{1/2}\sigma(t)dt.$$

On a vu dans la preuve de (7) que cette intégrale était convergente. Cela prouve (15).

Grâce à (15), le théorème de convergence dominée nous permet de calculer la limite de $I_l(x', h', x, h)$ quand l tend vers l'infini, c'est-à-dire $I(x', h', x, h)$, comme l'intégrale obtenue en remplaçant, dans la formule qui précède (15), l'intégrale sur $\Delta_l(t)$ par l'intégrale sur la limite de cet ensemble, c'est-à-dire sur $U_{P^H}(F)_{c'}$ tout entier. On reconnaît la double intégrale sur $\tilde{G}(F) \times U_{P^H}(F)_{c'}$: elle donne

$$\mathcal{L}_{\rho,\tilde{\pi},c'}(\rho(tkh)\epsilon' \otimes \Phi\mu(t'k'a)e'(x'_*h'), \rho(tk'h')\epsilon \otimes \Phi\mu(tka)e(x_*h)),$$

ce terme étant calculé à l'aide du caractère ξ^H. D'après le choix de c' et le lemme 5.1, c'est aussi

$$\mathcal{L}_{\rho,\tilde{\pi}}(\rho(tkh)\epsilon' \otimes \Phi\mu(t'k'a)e'(x'_*h'), \rho(tk'h')\epsilon \otimes \Phi\mu(tka)e(x_*h)).$$

D'où

$$I(x', h', x, h) = \int_{\omega_{[k-r]}(c+c_\psi)} \int_{K^2_{k-r-1}} \int_{A_{k-r-1}(F)^2} |det(tt')|_F^{(1-d_{\tilde{V}}-k)/2}\delta_{B_{k-r-1}}(tt')^{-1}$$

$$\mathcal{L}_{\rho,\tilde{\pi}}(\rho(tkh)\epsilon' \otimes \Phi\mu(t'k'a)e'(x'_*h'), \rho(t'k'h')\epsilon \otimes \Phi\mu(tka)e(x_*h))dt\, dt'\, dk\, dk'\, da.$$

Remarquons que les intégrales sur K_{k-r-1} et $A_{k-r-1}(F)$ se regroupent en intégrales sur $U_{k-r-1}(F)\backslash GL_{k-r-1}(F)$, d'où

$$(16) \qquad I(x', h', x, h) = \int_{\omega_{[k-r]}(c+c_\psi)} \int_{(U_{k-r-1}(F)\backslash GL_{k-r-1}(F))^2} |det(\gamma\gamma')|_F^{(1-d_{\tilde{V}}-k)/2}$$

$$\mathcal{L}_{\rho,\tilde{\pi}}(\rho(\gamma h)\epsilon' \otimes \Phi\mu(\gamma' a)e'(x'_*h'), \rho(\gamma' h')\epsilon \otimes \Phi\mu(\gamma a)e(x_*h))d\gamma\, d\gamma'\, da.$$

Cette égalité et (6) entraînent que, si $\mathcal{L}_{\rho,\tilde{\pi}}$ est nulle, $\mathcal{L}_{\pi,\rho}$ l'est aussi. Inversement, supposons $\mathcal{L}_{\rho,\tilde{\pi}}$ non nulle. Fixons $\tilde{e}, \tilde{e}' \in E_{\tilde{\pi}}$, $\epsilon, \epsilon' \in E_\rho$ tels que $\mathcal{L}_{\rho,\tilde{\pi}}(\epsilon' \otimes \tilde{e}', \epsilon \otimes \tilde{e}) \neq 0$. Fixons un sous-groupe ouvert compact $K' \subset GL_{k-r-1}(F)$ tel que ϵ et ϵ' soient invariant par K' et $\bar{\xi}$

soit trivial sur $U_{k-r-1}(F)\cap K'$. L'espace des fonctions $\gamma\mapsto\phi\mu(\gamma)\eta$ sur $GL_{k-1}(F)$, quand η parcourt E_μ, est le modèle de Kirillov de μ. Ce modèle contient toutes les fonctions localement constantes, se transformant à gauche par $U_{k-1}(F)$ selon le caractère ξ et de support d'image compacte dans $U_{k-1}(F)\backslash GL_{k-1}(F)$. On peut donc choisir η tel que la fonction $\gamma\mapsto\phi\mu(\gamma)\eta$ sur $GL_{k-r-1}(F)$ soit à support dans $U_{k-r-1}(F)K'$ et vaille 1 sur K'. On choisit $\eta'=\eta$. Fixons une sous-variété analytique Λ de K^H, contenant 1, telle que l'application produit $(Q_0(F)\cap H(F))\times\Lambda\to H(F)$ soit un homéomorphisme au voisinage des éléments neutres (c'est-à-dire un homéomorphisme d'un voisinage de $(1,1)$ dans l'espace de départ sur un voisinage de 1 dans l'espace d'arrivée). Les arguments que l'on a utilisés ci-dessus pour décomposer les intégrales montrent que l'application

$$\begin{array}{ccc}(U(F)\cap U_{\bar{Q}}(F))\times\Lambda & \to & Q(F)\backslash G(F)\\ (x,h) & \mapsto & x_*h\end{array}$$

est aussi un homéomorphisme au voisinage des éléments neutres. On peut donc choisir un voisinage ouvert compact ω_U de 1 dans $U(F)\cap U_{\bar{Q}}(F)$ et un voisinage ouvert compact $\omega_H\subset\Lambda$ de sorte qu'il existe deux fonctions $e,e'\in E_\pi$ vérifiant les propriétés suivantes : l'image dans $Q(F)\backslash G(F)$ du support de e, resp. e', est égale à l'image de $\omega_U\times\omega_H$ par l'application précédente ; pour $(x,h)\in\omega_U\times\omega_H$, $e(x_*h)=\eta\otimes\tilde{e}$, resp. $e'(x_*h)=\eta\otimes\tilde{e}$. Quitte à restreindre ω_H, on peut supposer que ω_H fixe ϵ et ϵ'. Calculons $\mathcal{L}_{\pi,\rho}(\epsilon'\otimes e',\epsilon\otimes e)$. On a

(17) $I(x',h',x,h)=0$ si h ou h' n'appartient pas à $(Q_0(F)\cap H(F))\omega_H$; pour $h,h'\in\omega_H$, $I(x',h',x,h)=0$ si x ou x' n'appartient pas à ω_U.

En effet, modulo multiplication à gauche par des éléments de $Q_0(F)\cap H(F)$, on peut supposer que $h,h'\in H_0(F)K^H$. Alors $I(x',h',x,h)$ est calculé par la formule (16). Il résulte de cette formule et de la définition de e que, si $I(x',h',x,h)\neq 0$, il existe $x''\in\omega_U$ et $h''\in\omega_H$ de sorte que $xh\in Q(F)x''h''$. Mais cette relation entraîne que les images dans $(Q_0(F)\cap H(F))\backslash H(F)$ de h et h'' sont égales. Donc $h\in(Q_0(F)\cap H(F))\omega_H$. Supposons maintenant $h\in\omega_H$. Si $I(x',h',x,h)\neq 0$, on a encore des x'' et h'' comme ci-dessus, et les images de h et h'' dans $(Q_0(F)\cap H(F))\backslash H(F)$ sont égales. Mais l'application naturelle de ω_H dans ce quotient est injective. Donc $h=h''$ puis $x\in Q(F)x''$. Puisque $x,x''\in U(F)$, cela entraîne $x\in(U(F)\cap Q(F))x''$. L'application naturelle de $U(F)\cap U_{\bar{Q}}(F)$ dans $(U(F)\cap Q(F))\backslash U(F)$ est injective, donc $x=x''\in\omega_U$. Les mêmes arguments s'appliquent à x' et h'.

Cette propriété nous permet de remplacer dans la formule (6) les intégrales sur $(Q_0(F)\cap H(F))\backslash H(F)$ et $U(F)\cap U_{\bar{Q}}(F)$ par des intégrales sur ω_H et ω_U, pour une mesure convenable sur ω_H. Sur ces ensembles d'intégration, $I(x',h',x,h)$ est constante, égale à $I(1,1,1,1)$. Donc $\mathcal{L}_{\pi,\rho}(\epsilon'\otimes e',\epsilon\otimes e)$ est un multiple non nul de ce terme. On peut choisir c assez grand pour que $\omega_{[k-r]}(c+c_\psi)$ fixe η et η'. Alors la formule (16) devient

$$I(1,1,1,1)=mes(\omega_{[k-r]}(c+c_\psi)\int_{(U_{k-r-1}(F)\backslash GL_{k-r-1}(F))^2}|det(\gamma\gamma')|_F^{(1-d_{\tilde{V}}-k)/2}$$

$$\mathcal{L}_{\rho,\tilde{\pi}}(\rho(\gamma)\epsilon'\otimes\tilde{e}',\rho(\gamma')\epsilon\otimes\tilde{e})(\phi\mu(\gamma)\eta)(\phi\mu(\gamma')\eta')d\gamma\,d\gamma'.$$

D'après les choix de η et η', cette expression est un multiple non nul de $\mathcal{L}_{\rho,\tilde{\pi}}(\epsilon'\otimes\tilde{e}',\epsilon\otimes\tilde{e})$. Donc $\mathcal{L}_{\pi,\rho}(\epsilon'\otimes e',\epsilon\otimes e)\neq 0$, ce qui achève la démonstration. $\square$

5.3 Variable d'induction et entrelacements tempérés

Soient (V, q_V) et (W, q_W) deux espaces quadratiques compatibles, avec $d_W < d_V$. Soit $Q = LU_Q$ un sous-groupe parabolique de G. Le groupe L s'identifie à un produit

$$L = GL_{k_1} \times ... \times GL_{k_s} \times \tilde{G},$$

où $\tilde{G}$ est le groupe spécial orthogonal d'un sous-espace $\tilde{V}$ de V. Le groupe $A_L(F)$ s'identifie à $F^{\times s}$. On suppose que K est en bonne position relativement à L. Soient μ_1, resp. $\mu_2, ..., \mu_s, \tilde{\pi}$ des représentations admissibles irréductibles et tempérées de $GL_{k_1}(F)$, resp. $GL_{k_2}(F)$,...,$GL_{k_s}(F)$, $\tilde{G}(F)$. Posons $\tau = \mu_1 \otimes ... \otimes \mu_s \otimes \tilde{\pi}$. C'est une représentation de $L(F)$. Pour $\lambda \in i\mathcal{A}^*_{L,F}$, on définit la représentation induite $\pi_\lambda = Ind_Q^G(\tau_\lambda)$, que l'on réalise dans l'espace $\mathcal{K}^G_{Q,\tau}$. Fixons des produits scalaires invariants sur les espaces de μ_1,...,μ_s, $\tilde{\pi}$. On construit la forme hermitienne

$$(e', e) = \int_K (e'(k), e(k))dk$$

sur $\mathcal{K}^G_{Q,\tau}$. Soit $\rho \in Temp(H)$. Pour $\lambda \in i\mathcal{A}^*_{L,F}$, $\epsilon, \epsilon' \in E_\rho$ et $e, e' \in \mathcal{K}^G_{Q,\tau}$, on définit $\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\rho}(\epsilon' \otimes e', \epsilon \otimes e)$.

Lemme. *(i) L'application $\lambda \mapsto \mathcal{L}_{\pi_\lambda,\rho}(\epsilon' \otimes e', \epsilon \otimes e)$ est C^∞ sur $i\mathcal{A}^*_{L,F}$.*

(ii) Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- il existe λ tel que $\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\rho}$ ne soit pas nul;

- pour tout λ, $\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\rho}$ n'est pas nul;

- $\mathcal{L}_{\tilde{\pi},\rho}$ n'est pas nul.

(iii) Si ces conditions sont vérifiées, on peut choisir des familles finies $(\epsilon'_i)_{i=1,...,n}$, $(\epsilon_i)_{i=1,...,n}$ d'éléments de E_ρ, des familles finies $(e'_i)_{i=1,...,n}$, $(e_i)_{i=1,...,n}$ d'éléments de $\mathcal{K}^G_{Q,\tau}$ et une famille finie $(\varphi_i)_{i=1,...,n}$ de fonctions C^∞ sur $i\mathcal{A}^*_{L,F}$ de sorte que

$$\sum_{i=1,...,n} \varphi_i(\lambda)\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\rho}(\epsilon'_i \otimes e'_i, \epsilon_i \otimes e_i) = 1$$

pour tout λ.

Preuve. Pour $\epsilon, \epsilon', e, e'$ fixés, la preuve du lemme 3.5 montre qu'il existe c_0 tel que, pour tout $c \geq c_0$ et tout $\lambda \in i\mathcal{A}^*_{L,F}$, on ait l'égalité

$$\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\rho}(\epsilon' \otimes e', \epsilon \otimes e) = \mathcal{L}_{\pi_\lambda,\rho,c}(\epsilon' \otimes e', \epsilon \otimes e).$$

Soit D un opérateur différentiel sur $i\mathcal{A}^*_{L,F}$, à coefficients C^∞. Il existe un réel $R \geq 0$ tel que l'on ait une majoration

$$|D(e', \pi_\lambda(g)e)| << \sigma(g)^R \Xi^G(g)$$

pour tous $g \in G(F)$ et $\lambda \in i\mathcal{A}^*_{L,F}$. Alors $D\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\rho,c}(\epsilon' \otimes e', \epsilon \otimes e)$ est uniformément majorée par l'intégrale

$$\int_{H(F)U(F)_c} \Xi^H(h)\Xi^G(hu)\sigma(hu)^R du\, dh$$

qui est convergente d'après 4.3(4). Le théorème usuel de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre entraîne que $\lambda \mapsto \mathcal{L}_{\pi_\lambda,\rho,c}(\epsilon' \otimes e', \epsilon \otimes e)$ est C^∞. D'où (i).

Introduisons le sous-groupe parabolique Q' de G contenant Q, dont la composante de Lévi est $L' = GL_k \times \tilde{G}$, où $k = k_1 + ... + k_s$. Soit $\lambda \in i\mathcal{A}^*_{L,F}$. Posons $\tau^{L'}_\lambda = Ind^{L'}_{L'\cap Q}(\tau_\lambda)$. C'est une représentation de $L'(F)$ de la forme $\mu_\lambda \otimes \tilde{\pi}$. La représentation μ_λ est une représentation tempérée et irréductible de $GL_k(F)$. On sait en effet que, dans les groupes linéaires, l'induite d'une représentation tempérée irréductible est irréductible. On a $\pi_\lambda = Ind^G_{Q'}(\tau^{L'}_\lambda)$. Appliquant la proposition 5.2, on voit que la non-nullité de $\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\rho}$est équivalente à la non-nullité de $\mathcal{L}_{\tilde{\pi},\rho}$. L'assertion (ii) s'en déduit.

Supposons satisfaites les conditions de (ii). Pour tout λ, on choisit des éléments ϵ_λ,ϵ'_λ, e_λ et e'_λ tels que

$$\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\rho}(\epsilon'_\lambda \otimes e'_\lambda, \epsilon_\lambda \otimes e_\lambda) \neq 0.$$

Grâce à (i), il existe un voisinage ω_λ de λ dans $i\mathcal{A}^*_{L,F}$tel que

$$\mathcal{L}_{\pi_{\lambda'},\rho}(\epsilon'_\lambda \otimes e'_\lambda, \epsilon_\lambda \otimes e_\lambda) \neq 0$$

pour tout $\lambda' \in \omega_\lambda$. Puisque $i\mathcal{A}^*_{L,F}$ est compact, on peut choisir une famille finie $(\lambda_i)_{i=1,...,n}$ de sorte que

$$\bigcup_{i=1,...,n} \omega_{\lambda_i} = i\mathcal{A}^*_{L,F}.$$

On définit $\epsilon_i, \epsilon'_i, e_i, e'_i$ par $\epsilon_i = \epsilon_{\lambda_i}$ etc... Notons φ'_i la conjuguée complexe de la fonction

$$\lambda \mapsto \mathcal{L}_{\pi_\lambda,\rho}(\epsilon'_i \otimes e'_i, \epsilon_i \otimes e_i).$$

et posons

$$\varphi(\lambda) = \sum_{i=1,...,n} \varphi'_i(\lambda)\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\rho}(\epsilon'_i \otimes e'_i, \epsilon_i \otimes e_i).$$

Alors φ est une fonction C^∞ à valeurs strictement positives. On satisfait la condition (iii) en définissant $\varphi_i = \varphi'_i/\varphi$. $\square$

5.4 Le cas des induites réductibles

On conserve les données de 5.3. Posons $\pi = \pi_0$. Cette représentation est semi-simple et toute sous-représentation irréductible y intervient avec multiplicité 1.

Lemme. *Supposons $\mathcal{L}_{\pi,\rho}$ non nulle. Alors il existe une unique sous-représentation irréductible π' de π telle que $\mathcal{L}_{\pi',\rho}$ soit non nulle.*

Preuve. Par construction, pour toute sous-représentation irréductible π' de π, la forme $\mathcal{L}_{\pi',\rho}$ est la restriction de $\mathcal{L}_{\pi,\rho}$ à l'espace $E_\rho \otimes E_{\pi'}$, où $E_{\pi'} \subset \mathcal{K}^G_{Q,\tau}$ est l'espace de π'. D'autre part, soient $\epsilon', \epsilon'' \in E_\rho$ et $e', e'' \in \mathcal{K}^G_{Q,\tau}$. Pour $\lambda \in i\mathcal{A}^*_{L,F}$ en position générale, la représentation π_λ est irréductible. D'après 5.1(1), on a l'égalité

$$|\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\rho}(\epsilon' \otimes e'', \epsilon'' \otimes e')|^2 = |\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\rho}(\epsilon' \otimes e', \epsilon' \otimes e')||\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\rho}(\epsilon'' \otimes e'', \epsilon'' \otimes e'')|.$$

D'après le lemme 5.3(i), tous les termes sont continus en λ. L'égalité est donc vraie pour tout λ. Pour $\lambda = 0$, elle donne

$$(1) \qquad |\mathcal{L}_{\pi,\rho}(\epsilon' \otimes e'', \epsilon'' \otimes e')|^2 = |\mathcal{L}_{\pi,\rho}(\epsilon' \otimes e', \epsilon' \otimes e')||\mathcal{L}_{\pi,\rho}(\epsilon'' \otimes e'', \epsilon'' \otimes e'')|.$$

Puisque $\mathcal{L}_{\pi,\rho}$ n'est pas nulle, on peut choisir $\epsilon', \epsilon'', e', e''$ tels que $\mathcal{L}_{\pi,\rho}(\epsilon' \otimes e'', \epsilon'' \otimes e') \neq 0$. Par linéarité, on peut supposer qu'il existe des sous-représentations irréductibles π' et π'' de π telles que $e' \in E_{\pi'}$ et $e'' \in E_{\pi''}$. La relation (1) entraîne que $\mathcal{L}_{\pi,\rho}(\epsilon' \otimes e', \epsilon' \otimes e') \neq 0$, donc $\mathcal{L}_{\pi',\rho}$ n'est pas nulle. D'où l'existence affirmée dans l'énoncé. Soient maintenant π' et π'' des sous-représentations irréductibles de π telles que $\mathcal{L}_{\pi',\rho}$ et $\mathcal{L}_{\pi'',\rho}$ ne soient pas nulles. En appliquant 5.1(2), on peut fixer $\epsilon', \epsilon'' \in E_\rho$, $e' \in E_{\pi'}$ et $e'' \in E_{\pi''}$ de sorte que $\mathcal{L}_{\pi,\rho}(\epsilon' \otimes e', \epsilon' \otimes e') \neq 0$ et $\mathcal{L}_{\pi,\rho}(\epsilon'' \otimes e'', \epsilon'' \otimes e'') \neq 0$. D'après (1), on a aussi $\mathcal{L}_{\pi,\rho}(\epsilon' \otimes e'', \epsilon'' \otimes e') \neq 0$. Par construction de $\mathcal{L}_{\pi,\rho}$, cela entraîne que le coefficient $g \mapsto (e'', \pi(g)e')$ n'est pas nul. Les sous-espaces $E_{\pi'}$ et $E_{\pi''}$ ne sont donc pas orthogonaux, ce qui implique $\pi' = \pi''$. $\square$

5.5 Le cas $r = 0$: majoration des entrelacements

Soient (V, q_V) et (W, q_W) deux espaces quadratiques compatibles. On suppose $d_V = d_W + 1$. Soit π, resp. ρ, une représentation tempérée de $G(F)$, resp. $H(F)$. Soient $l \in Hom_{H,\xi}(\pi, \rho)$ et $\underline{K}$ un sous-groupe ouvert compact de $G(F)$.

Proposition. *Pour tous $\epsilon \in E_\rho$, $e \in E_\pi$, il existe un réel $D \geq 0$ tels que*

$$\int_{\underline{K}} |(\epsilon, l(\pi(kg)e))| dk << \sigma(g)^D \Xi^G(g)$$

pour tout $g \in G(F)$.

Preuve. La proposition dépend du groupe $\underline{K}$. Soit $\underline{K}'$ un autre sous-groupe ouvert compact de $G(F)$. Montrons d'abord que la proposition relative à $\underline{K}$ est équivalente à celle relative à $\underline{K}'$. On peut démontrer que la proposition relative à $\underline{K}$ est équivalente à celle relative à $\underline{K} \cap \underline{K}'$, puis que celle-ci est équivalente à celle relative à $\underline{K}'$. Cela nous ramène au cas où $\underline{K}' \subset \underline{K}$. Notons $I_{\underline{K}}(\epsilon, e, g)$ l'intégrale de l'énoncé et $I_{\underline{K}'}(\epsilon, e, g)$ son analogue pour le groupe $\underline{K}'$. On a les inégalités

$$I_{\underline{K}'}(\epsilon, e, g) \leq I_{\underline{K}}(\epsilon, e, g) \leq \sum_{k \in \underline{K}' \backslash \underline{K}} I_{\underline{K}'}(\epsilon, e, kg),$$

dont on déduit la propriété voulue.

On a fixé un élément $v_0 \in V$, non nul et orthogonal à W. On peut multiplier q_V et q_W par une constante, cela ne change rien aux groupes G et H ni aux données de notre problème. On peut donc supposer $q_V(v_0) = 1$, ce qui simplifiera la rédaction. La proposition est triviale si q_V est anisotrope : dans ce cas, $G(F)$ est compact et la fonction $g \mapsto (\epsilon, l(\pi(g)e)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Supposons que q_V n'est pas anisotrope. Fixons un système hyperbolique maximal $(v_{\pm i})_{i=1,...,n}$ de V. On a $n \geq 1$. Notons V_{an} l'orthogonal du sous-espace engendré par ces éléments et posons :

$$\underline{R}_{an} = \{v \in V_{an}; q_V(v) \in \mathfrak{o}_F\}.$$

Notons $\underline{R}$ la somme de $\underline{R}_{an}$ et du $\mathfrak{o}_F$-module engendré par les $v_{\pm i}$, $i = 1, ..., n$. Ce réseau possède un élément v tel que $q_V(v) = 1$, par exemple $v = v_1 + v_{-1}$. Quitte à transformer le système hyperbolique et le réseau $\underline{R}$ par l'action d'un élément de $G(F)$, on peut donc supposer $v_0 \in \underline{R}$. Notons $\underline{K}$ le stabilisateur de $\underline{R}$ dans $G(F)$. C'est un sous-groupe compact maximal de $G(F)$, pas forcément spécial (il l'est si $V_{an}=\{0\}$ ou si V_{an} possède un élément v tel que $q_V(v)\in\mathfrak{o}_F^\times$). Le groupe $\underline{K}$ contient en tout cas comme sous-groupe d'indice fini un sous-groupe parahorique de $G(F)$. Soit A_{min} le sous-tore déployé maximal de G formé des éléments qui conservent chaque droite $Fv_{\pm i}$ et agissent trivialement sur V_{an}. Notons M_{min} le commutant de A_{min} dans G, qui est un Lévi minimal de G. Le groupe $\underline{K}$ est en bonne position relativement à M_{min}. Pour obtenir la majoration de l'énoncé pour le groupe $\underline{K}$, il suffit de majorer $I_{\underline{K}}(\epsilon,e,a)$ pour $a\in A_{min}(F)$. En effet, d'après Bruhat-Tits, il existe un sous-ensemble compact Γ de $G(F)$ tel que tout élément $g\in G(F)$ s'écrive $g=ka\gamma$, avec $k\in\underline{K}$, $a\in A_{min}(F)$ et $\gamma\in\Gamma$. On a alors

$$I_{\underline{K}}(\epsilon,e,g)=I_{\underline{K}}(\epsilon,\pi(\gamma)e,a)$$

et la majoration de ce dernier terme implique la majoration cherchée de $I_{\underline{K}}(\epsilon,e,g)$. Comme dans la preuve de 4.9, introduisons le groupe de permutations $\mathfrak{S}$ et, pour $s\in\mathfrak{S}$, le sous-ensemble $A_{min}(F)_s^-$ de $A_{min}(F)$. Le groupe $A_{min}(F)$ est réunion des sous-ensembles $A_{min}(F)_s^-$, quand s parcourt $\mathfrak{S}$. On peut donc fixer s et se limiter aux $a\in A_{min}(F)_s^-$. Quitte à réindexer notre système hyperbolique, on peut supposer que s est l'identité. Notons simplement $A_{min}(F)^-$ l'ensemble des $a\in A_{min}(F)$ tels que $val_F(a_n)\geq...\geq val_F(a_1)\geq 0$. On peut se limiter à majorer $I_{\underline{K}}(\epsilon,e,a)$ pour $a\in A_{min}(F)^-$.

Fixons un entier $l\geq 0$ tel que

(1) $l\geq val_F(2)$;

(2) pour tout $x\in F$, la condition $val_F(x)\geq l+1$ entraîne que $1+x$ est un carré et possède une racine $\sqrt{1+x}$ telle que $val_F(\sqrt{1+x}-1)=val_F(x/2)$.

Si $p\neq 2$, on peut prendre $l=0$. Pour $i=1,...,n$, posons $v'_i=\varpi_F^{il}v_i$ et $v'_{-i}=\varpi_F^{-il}v_{-i}$. Notons $\underline{R}'$ le réseau somme de $\underline{R}_{an}$ et du $\mathfrak{o}_F$-module engendré par les $v'_{\pm i}$ pour $i=1,...,l$. Notons $\underline{K}'$ le stabilisateur de $\underline{R}'$ dans $G(F)$ ($\underline{R}'=\underline{R}$ et $\underline{K}'=\underline{K}$ si $l=0$). S'il existe $v\in V_{an}$ tel que $q_V(v)=1$, on fixe un tel élément que l'on note v'_0 et on pose $E=\{\pm v'_0\}$, $\iota=1$. Sinon, on pose $v'_0=v_1+v_{-1}$, $E=\{\varpi_F^{-c}v'_1+\varpi_F^cv'_{-1};c=0,...,l\}$, $\iota=2$. Remarquons que $E\subset\underline{R}'$ dans le premier cas. Fixons $a\in A_{min}(F)^-$ et posons $\alpha_i=val_F(a_i)$ pour tout $i=1,...,n$. Notons $\mathcal{B}'$ le sous-ensemble des suites $\mathbf{b}=(b_1,...,b_n)\in\mathbb{Z}^n$ telles que

$b_n\geq b_{n-1}\geq...\geq b_1$;

$\alpha_n-b_n\geq\alpha_{n-1}-b_{n-1}\geq...\geq\alpha_1-b_1\geq 0$.

Notons $X'=\{x\in V;q_V(x)=1\}$. Soit $x\in X'$. Pour $i=1,...,n$, introduisons l'ensemble

$$B_i(x)=\{b\in\mathbb{Z};b\leq\alpha_i,\ x\in\varpi_F^{b-\alpha_i}a\underline{R}'+\varpi_F^b\underline{R}'\}.$$

L'ensemble $B_i(x)$ n'est pas vide : il contient tout élément suffisamment négatif. Posons $b_i(x)=sup(B_i(x))$, puis $\mathbf{b}(x)=(b_1(x),...,b_n(x)\}$. Montrons que

(3) $\mathbf{b}(x)$ appartient à $\mathcal{B}'$.

Pour $i\leq n-1$ et $b\in B_i(x)$, on a $b\leq\alpha_i\leq\alpha_{i+1}$ et

$$x\in\varpi_F^{b-\alpha_i}a\underline{R}'+\varpi_F^b\underline{R}'\subset\varpi_F^{b-\alpha_{i+1}}a\underline{R}'+\varpi_F^b\underline{R}'.$$

Donc $b\in B_{i+1}(x)$. Ainsi $B_i(x)\subset B_{i+1}(x)$, d'où $b_{i+1}(x)\geq b_i(x)$. Posons

$$C_i(x)=\{c\in\mathbb{Z};c\leq 0,\ x\in\varpi_F^ca\underline{R}'+\varpi_F^{c+\alpha_i}\underline{R}'\}.$$

On a $b_i(x)-\alpha_i=sup(C_i(x))$. On voit comme ci-dessus que $C_{i+1}(x)\subset C_i(x)$, d'où $b_{i+1}(x)-\alpha_{i+1}\leq b_i(x)-\alpha_i$. Enfin, $\alpha_1-b_1(x)\geq 0$ par définition de $b_1(x)$. Cela prouve (3).

Le groupe $\underline{K}'\cap a\underline{K}'a^{-1}$ agit sur X'. Par construction, les ensembles $B_i(x)$ ne dépendent que de l'orbite de x pour cette action. L'élément $\mathbf{x}$ ne dépend donc lui-aussi que de cette orbite. L'application

$$\begin{array}{ccc} H(F)\backslash G(F) & \to & X' \\ g & \mapsto & g^{-1}v_0 \end{array}$$

est un isomorphisme. Le quotient des mesures de Haar sur $H(F)$ et $G(F)$ est une mesure sur l'ensemble de départ que l'on transporte à l'ensemble d'arrivée. Posons $X = \underline{R}\cap X'$. Pour $\mathbf{b}\in\mathcal{B}'$, notons $X(\mathbf{b})$ l'ensemble des $x\in X$ tels que $\mathbf{b}(x)=\mathbf{b}$. Notons $\mathcal{B}$ le sous-ensemble des $\mathbf{b}\in\mathcal{B}'$ qui vérifient de plus $b_1\geq -nl$ et, dans le cas où $\iota=2$, $b_1\leq 0$. Montrons que

(4) pour $\mathbf{b}\in\mathcal{B}'$, $X(\mathbf{b})$ est vide si $\mathbf{b}\not\in\mathcal{B}$; on a une majoration

$$mes(X(\mathbf{b})) << q^{-\sum_{i=1,...,n}b_i}$$

pour tout $\mathbf{b}=(b_1,...,b_n)\in\mathcal{B}$.

Soit $x\in X$. On a l'inclusion $\underline{R}\subset\varpi_F^{-nl}\underline{R}'$, donc $-nl\in B_1(x)$ et $b_1(x)\geq -nl$. Supposons $b_1(x)>0$, donc aussi $\alpha_1>0$. Ecrivons $x=x_{an}+\sum_{i=\pm 1,...,\pm n}x_iv'_i$, avec $x_{an}\in V_{an}$ et $x_i\in F$ pour tout i. Puisque $x\in\underline{R}$, on a $x_{an}\in\underline{R}_{an}$ et $val_F(x_{-i})\geq l$ pour tout $i=1,...,n$. La condition

$$x\in\varpi_F^{1-\alpha_1}a\underline{R}'+\varpi_F\underline{R}'$$

entraîne $val_F(x_i)\geq 1$ pour tout i. La condition $q_V(x)=1$ entraîne alors $val_F(q_V(x_{an})-1)\geq l+1$. Donc $q_V(x_{an})$ est un carré et l'élément $v=x_{an}/\sqrt{q_V(x_{an})}$ de V_{an} vérifie $q_V(v)=1$. Donc $\iota=1$. Cela prouve la première assertion de (4).

Soit $\mathbf{b}\in\mathcal{B}$. Comme ci-dessus, écrivons tout élément $x\in V$ sous la forme $x=x_{an}+\sum_{i=\pm 1,...\pm n}x_iv'_i$. Notons $\underline{R}(\mathbf{b})$ l'ensemble des $x\in\underline{R}$ tels que $val_F(x_i)\geq b_i$ pour tout $i=1,...,n$. On vérifie que $X(\mathbf{b})\subset\underline{R}(\mathbf{b})$. Considérons l'application

$$\begin{array}{ccc} V & \to & F \\ v & \mapsto & q_V(v). \end{array}$$

Soit $\nu\in F^\times$, notons V_ν la fibre de cette application au-dessus de ν. Au-dessus de $F^\times$, l'application est une fibration localement triviale. Des mesures de Haar sur V et F se déduit donc une mesure sur V_ν, notons-la $d_\nu v$. Pour $f\in C_c^\infty(V)$, on a l'égalité

$$\int_V f(v)dv=\int_F\int_{V_\nu}f(v)d_\nu v\,d\nu.$$

La mesure d_ν est invariante par l'action de $G(F)$ et c'est la seule mesure vérifiant cette condition, à une constante. Pour $\nu=1$, on a $V_1=X'$ et on peut supposer que d_1 coïncide avec la mesure que l'on a précédemment introduite sur cet ensemble. D'autre part, pour $\lambda\in F^\times$, on vérifie que

$$\int_{V_\nu}f^\lambda(v)d_\nu v=|\lambda|_F^{2-dim(V)}\int_{V_{\lambda^2\nu}}f(v)d_{\lambda^2\nu},$$

où, comme d'habitude, f^λ est définie par $f^\lambda(v)=f(\lambda v)$. Supposons $f^\lambda=f$ pour $\lambda\in\mathfrak{o}_F^\times$. On déduit des relations ci-dessus l'égalité

$$mes(\mathfrak{o}_F^{\times,2})\int_{V_\nu}f(v)d_\nu v=\int_{v\in V;q_V(v)\in\nu\mathfrak{o}_F^{\times,2}}f(v)dv.$$

On applique cela à $\nu = 1$ et à la fonction caractéristique f de l'ensemble $\underline{R}(\mathbf{b})$. On obtient une majoration

$$mes(X(\mathbf{b})) << mes(\{x \in \underline{R}(\mathbf{b}); q_V(x) \in \mathfrak{o}_F^{\times,2}\}) << mes(\underline{R}(\mathbf{b})) << q^{-\sum_{i=1,...,n} b_i}.$$

Cela prouve la seconde assertion de (4).

Soit $x \in \underline{R}$. Montrons que

(5) dans l'orbite de x sous l'action de $\underline{K}' \cap a\underline{K}'a^{-1}$, il existe un élément y (non nécessairement dans $\underline{R}$) de la forme $y = e + \sum_{i=\iota,...,n} y_i v_i'$, où $e \in E$.

Pour cela, on écrit $x = x_{an} + \sum_{\pm 1,...,\pm n} x_i v_i'$ et on montre par récurrence sur $j = 1, ..., n$ que

(6) la conclusion de (5) est vérifiée si $x_{-i} = 0$ pour $i = j+1, ..., n$.

Pour $v', v'' \in V$, on note $c(v', v'')$ l'élément de $\mathfrak{g}(F)$ défini par

$$c(v', v'')(v) = q_V(v, v')v'' - q_V(v, v'')v'.$$

Notons V_j, resp. V_{j-1}, le sous-espace de V engendré par V_{an} et les $v_{\pm i}'$ pour $i = 1, ..., j$, resp. $i = 1, ..., j-1$. Pour $v \in V_{j-1}$, on pose $k_v = exp(c(v_{-j}', v))$. On a

$$k_v v_{-j}' = v_{-j}';$$

$$k_v v_j' = v_j' + v - q_V(v)v_{-j}';$$

$$k_v(z) = z - q_V(z, v)v_{-j}', \text{ pour } z \in V_{j-1};$$

$$k_v z = z, \text{ pour } z \text{ orthogonal à } V_j.$$

En particulier, si $v \in \underline{R}' \cap V_{j-1}$, on a $k_v \in \underline{K}'$. Mais $a^{-1}k_v a = exp(c(v_{-j}, a_j a^{-1} v))$ et $a_j a^{-1}(\underline{R}' \cap V_{j-1}) \subset \underline{R}' \cap V_{j-1}$. Donc, si $v \in \underline{R}' \cap V_{j-1}$, on a $k_v \in \underline{K}' \cap a\underline{K}'a^{-1}$. Soit x vérifiant l'hypothèse de (6). Ecrivons $x = u + x_j v_j' + z + x_{-j} v_{-j}'$, avec $u = \sum_{i=j+1,...,n} x_i v_i'$ et $z = x_{an} + \sum_{i=\pm 1,...\pm(j-1)} x_i v_i'$. L'élément u est orthogonal à V_j et appartient à $\underline{R}$. L'élément z appartient à $\underline{R} \cap V_{j-1} \subset \varpi_F^{(1-j)l} \underline{R}' \cap V_{j-1}$. On a aussi $val_F(x_j) \geq -jl$, $val_F(x_{-j}) \geq jl$. Supposons d'abord $val_F(x_j) \geq (1-j)l + 1$, donc $val_F(x_j x_{-j}) \geq l + 1$. L'égalité $q_V(x) = 1$ équivaut à $q_V(z) = 1 - x_j x_{-j}$. D'après le choix de l, on peut introduire une racine carrée $\sqrt{q_V(z)}$ telle que $val_F(1 - \sqrt{q_V(z)}) = val_F(x_j x_{-j}/2) \geq 1$. Posons

$$\lambda = \frac{1 - \sqrt{q_V(z)}}{x_j \sqrt{q_V(z)}}.$$

Alors $val_F(\lambda) = val_F(x_{-j}/2) \geq (j-1)l$. Donc $\lambda z \in \underline{R}' \cap V_{j-1}$ et $k_{\lambda z} \in \underline{K}' \cap a\underline{K}'a^{-1}$. On a

$$k_{\lambda z} x = u + x_j v_j' + (1 - \lambda x_j)z + (x_{-j} - 2\lambda q_V(z) - \lambda^2 x_j q_V(z))v_{-j}'.$$

On vérifie que le coefficient de v_{-j}' est nul : on a choisi λ pour cela. D'autre part $val_F(\lambda x_j) \geq 1$, donc $(1 - \lambda x_j)z \in \underline{R}$. Supposons $j \geq 2$. Alors $k_{\lambda z} x$ vérifie les mêmes conditions que x, l'entier j étant remplacé par $j-1$. L'hypothèse de récurrence permet de conclure. Si $j = 1$, l'élément $k_{\lambda z} x$ est de la forme $k_{\lambda z} x = y_{an} + \sum_{i=1,...,n} y_i v_i'$. On a $q_V(y_{an}) = 1$, donc $\iota = 1$. Il existe un élément $g_{an} \in G_{an}(F)$ tel que $g_{an}(y_{an}) = \pm v_0'$. Rappelons que $G_{an}(F)$ est contenu dans $\underline{K}' \cap a\underline{K}'a^{-1}$. En posant $y = g_{an} k_{\lambda z} x$, cet élément vérifie les conditions requises. Cela conclut le cas où $val_F(x_j) \geq (1-j)l + 1$. Supposons maintenant $val_F(x_j) \leq (1-j)l$. Alors $-z/x_j \in \underline{R}' \cap V_{j-1}$. L'élément $k_{-z/x_j} x$ est égal à $u + x_j v_j' + x_j^{-1} v_{-j}'$. Si $j \geq \iota$, considérons l'élément $v_0' \in \underline{R} \cap V_{j-1}$. On a $v_0'/x_j \in \underline{R}' \cap V_{j-1}$,

$k_{v'_0/x_j}k_{-z/x_j}x = u + x_jv'_j + v'_0$ et cet élément a la forme voulue. Si $j = 1 < \iota$, on a $-l \leq val_F(x_1) \leq 0$. En faisant agir un élément de $A_{min}(F) \cap \underline{K}' \cap a\underline{K}'a^{-1}$, on peut remplacer $k_{-z/x_1}x$ par un élément $u + \varpi_F^{-c}v'_1 + \varpi_F^c v'_{-1}$, avec $0 \leq c \leq l$, qui est de la forme voulue. Cela prouve (6) et (5).

Soient $\mathbf{b} = (b_1, ..., b_n) \in \mathcal{B}$ et $x \in X(\mathbf{b})$. Montrons que

(7) dans l'orbite de x sous l'action de $\underline{K}' \cap a\underline{K}'a^{-1}$, il existe un élément y de la forme $y = e + \sum_{i=\iota,...,n} \varpi_F^{\beta_i}v'_i$, avec $e \in E$, $b_i \leq \beta_i \leq b_i + l$ pour tout $i = \iota, ..., n$.

D'après (5), on peut remplacer x par un élément de la forme $x = e + \sum_{i=\iota,...,n} x_iv'_i$ avec $e \in E$. On va prouver que, pour tout $i = \iota, ..., n$, il existe un élément y de l'orbite de x sous l'action de $\underline{K}' \cap a\underline{K}'a^{-1}$ tel que $y = e + \varpi_F^{\beta_i}v'_i + \sum_{j=\iota,...,n, j\neq i} x_iv'_i$, avec $b_i \leq \beta_i \leq b_i + l$. L'assertion (7) résultera de cette propriété appliquée successivement à tout $i = \iota, ..., n$. Dans le cas où $\iota = 2$, on introduit la coordonnée supplémentaire x_1 en posant $e = x_1v'_1 + x_1^{-1}v'_{-1}$. En tout cas $x \in a\underline{R}' + \sum_{i=1,...,n} x_iv'_i$. Pour un tel élément, on calcule aisément $\mathbf{b}(x)$: pour tout $i = 1, ..., n$, $b_i(x)$ est le plus petit des entiers

$$\alpha_i,\ val_F(x_j) \text{ pour } j = i, ..., n,\ val_F(x_j) - \alpha_j + \alpha_i \text{ pour } j = 1, ..., i - 1.$$

Fixons $i \in \{\iota, ..., n\}$. Puisque $x \in X(\mathbf{b})$, on a $b_i(x) = b_i$. En particulier, $val_F(x_i) \geq b_i$. Si $val_F(x_i) \leq b_i + l$, il suffit de remplacer x par $a'x$, où a' est un élément convenable de $A_{min}(F) \cap \underline{K}' \cap a\underline{K}'a^{-1}$ pour obtenir l'élément y cherché. Supposons $val_F(x_i) > b_i + l$. Si le plus petit des entiers ci-dessus est $val_F(x_j)$ pour un j tel que $i + 1 \leq j \leq n$, on introduit l'élément $k = exp(c(v'_{-j}, v'_i))$. Il appartient à $\underline{K}'$. On a $a^{-1}ka = exp(a_ja_i^{-1}c(v'_{-j}, v'_i))$. Puisque $j > i$, $val_F(a_ja_i^{-1}) \geq 0$, donc $a^{-1}ka \in \underline{K}'$ et $k \in \underline{K}' \cap a\underline{K}'a^{-1}$. Posons $y = kx$. Les coordonnées de y sont les mêmes que celles de x, sauf y_i qui vaut $x_i + x_j$. Alors $val_F(y_i) = b_i$ et on conclut en appliquant encore un élément convenable de $A_{min}(F) \cap \underline{K}' \cap a\underline{K}'a^{-1}$. Si le plus petit des entiers ci-dessus est $val_F(x_j) - \alpha_j + \alpha_i$, pour un j tel que $1 \leq j \leq i - 1$, on introduit l'élément $k = exp(a_ia_j^{-1}c(v'_{-j}, v'_i))$ et on pose $y = kx$. On vérifie de même que k appartient à $\underline{K}' \cap a\underline{K}'a^{-1}$ et que les coordonnées de y sont les mêmes que celles de x, sauf y_i qui vérifie $val_F(y_i) = b_i$. On conclut comme précédemment. Reste le cas où le plus petit des entiers ci-dessus est α_i. On peut même supposer que tous les autres sont strictement plus grands. En particulier $val_F(x_n) > \alpha_n \geq 0$. D'après la définition de E, cela entraîne $\iota = 1$. On introduit alors l'élément $k = exp(c(e, a_iv'_i))$ et on pose $y = kx$. On vérifie encore que $k \in \underline{K}' \cap a\underline{K}'a^{-1}$ et que y a les mêmes coordonnées que x, sauf y_i qui vérifie $val_F(y_i) = b_i + val_F(2)$. On conclut comme précédemment. Cela prouve (7).

Notons X'' l'ensemble des $x \in X'$ de la forme $x = e + \sum_{i=1,...,n} x_iv_i$ si $\iota = 1$, $x = x_1^{-1}v_{-1} + \sum_{i=1,...,n} x_iv_i$ si $\iota = 2$, où $e \in E$ dans le premier cas et où, dans les deux cas et pour tout $i = 1, ..., n$, $x_i = \varpi_F^{c_i}$, avec $0 \leq c_i \leq (n + 1)l$. C'est un ensemble fini. Pour tout $x \in X''$, fixons $\gamma_x \in G(F)$ tel que $\gamma_x^{-1}v_0 = x$. Posons $\Gamma = \{\gamma_x; x \in X''\}$. Pour $\mathbf{b} = (b_1, ..., b_n) \in \mathcal{B}$, introduisons l'élément $a(\mathbf{b}) \in A_{min}(F)$ tel que $a(\mathbf{b})_i = \varpi_F^{b_i}$ pour tout $i = 1, ..., n$. Un élément y vérifiant la conclusion de l'assertion (7) est de la forme $a(\mathbf{b})x''$ pour un $x'' \in X''$, autrement dit de la forme $a(\mathbf{b})\gamma^{-1}v_0$ pour un $\gamma \in \Gamma$. On a donc

(8) pour tout $x \in X(\mathbf{b})$, il existe $k' \in \underline{K}' \cap a\underline{K}'a^{-1}$ et $\gamma \in \Gamma$ tels que $k'x = a(\mathbf{b})\gamma^{-1}v_0$.

Pour tout $x \in X''$, notons H^x le sous-groupe des éléments de G qui fixent x. Introduisons le sous-groupe parabolique $P_{min} = M_{min}U_{min} \in \mathcal{P}(M_{min})$ formé des éléments qui conservent le drapeau de sous-espaces

$$Fv_n \subset Fv_n \oplus Fv_{n-1} \subset ... \subset Fv_n \oplus ... \oplus Fv_1.$$

Introduisons aussi le sous-groupe parabolique $P' = M'U' \in \mathcal{F}(M_{min})$ formé des éléments qui conservent le drapeau des $n+1-\iota$ premiers sous-espaces ci-dessus. On a $P'=P_{min}$ si $\iota=1$ ou si $V_{an}=\{0\}$. Montrons que

(9) pour tout $x\in X''$, l'application

$$\begin{array}{ccc}(P'(F)\cap H^x(F))\times\bar{P}_{min}(F) & \to & G(F)\\ (p',\bar{p}) & \mapsto & p'\bar{p}\end{array}$$

est submersive à l'origine.

Il suffit de prouver l'égalité

$$(\mathfrak{p}'(F)\cap\mathfrak{h}^x(F))+\bar{\mathfrak{p}}_{min}(F)=\mathfrak{g}(F).$$

Notons $\mathfrak{h}^{x,\perp}$ l'orthogonal de $\mathfrak{h}^x$ dans $\mathfrak{g}$ pour la forme $(X,Y)\mapsto trace(XY)/2$ et notons $\bar{U}_{min}$ le radical unipotent de $\bar{P}_{min}$. Il suffit encore de prouver l'égalité

$$(\mathfrak{u}'(F)+\mathfrak{h}^{x,\perp}(F))\cap\bar{\mathfrak{u}}_{min}(F)=\{0\}.$$

Notons W^x l'orthogonal de x dans V. Tout élément de $\mathfrak{h}^{x,\perp}(F)$ est de la forme $c(x,y)$, pour un $y\in W^x$. On doit donc prouver que, pour $y\in W^x$, $N'\in\mathfrak{u}'(F)$, $\bar{N}\in\bar{\mathfrak{u}}_{min}(F)$, l'égalité $N'+c(x,y)=\bar{N}$ entraîne $\bar{N}=0$. Considérons de tels éléments. Soit $i=\iota,...,n$. On a $c(x,y)v_i=q_V(v_i,x)y-q_V(v_i,y)x=-q_V(v_i,y)x$. On a $q_V(N'v_i,v_{-i})=q_V(\bar{N}v_i,v_{-i})=0$. Donc $q_V(c(x,y)v_i,v_{-i})=0$, c'est-à-dire $-x_iq_V(v_i,y)=0$. Puisque $x_i\neq 0$, on a $q_V(v_i,y)=0$, donc $c(x,y)v_i=0$. Alors $N'v_i=\bar{N}v_i$. Ces éléments appartiennent à des sous-espaces de V d'intersection nulle, donc $\bar{N}v_i=0$. Si $\iota=1$, ou si $V_{an}=\{0\}$, cela suffit pour conclure : un élément de $\bar{\mathfrak{u}}(F)$ qui annule tous les v_i, pour $i=\iota,...,n$, est nul. Supposons $\iota=2$ et $V_{an}\neq\{0\}$. Il faut montrer de plus que $\bar{N}$ annule V_{an}. Soit $v_{an}\in V_{an}$. On a $c(x,y)v_{an}=q_V(v_{an},x)y-q_V(v_{an},y)x=-q_V(v_{an},y)x$. On a $q_V(N'v_{an},v_{-1})=q_V(\bar{N}v_{an},v_{-1})=0$, donc $q_V(c(x,y)v_{an},v_{-1})=0$, c'est-à-dire $-x_1q_V(v_{an},y)=0$. Puisque $x_1\neq 0$, on a $q_V(v_{an},y)=0$, donc $c(x,y)v_{an}=0$. Alors $N'v_{an}=\bar{N}v_{an}$. Ces éléments appartiennent encore à des sous-espaces de V d'intersection nulle, donc $\bar{N}v_{an}=0$. Cela démontre (9).

Après ces préparatifs, passons à la majoration de $I_{\underline{K}}(\epsilon,e,a)$. Pour tout $k\in\underline{K}$, on a $k^{-1}v_0\in X$. Pour $\mathbf{b}\in\mathcal{B}$, posons $\underline{K}(\mathbf{b})=\{k\in\underline{K};k^{-1}v_0\in X(\mathbf{b})\}$. On a l'égalité

$$I_{\underline{K}}(\epsilon,e,a)=\sum_{\mathbf{b}\in\mathcal{B}}I_{\underline{K}(\mathbf{b})}(\epsilon,e,a),$$

où

$$I_{\underline{K}(\mathbf{b})}(\epsilon,e,a)=\int_{\underline{K}(\mathbf{b})}|(\epsilon,l(\pi(ka)e))|dk.$$

Fixons $\mathbf{b}=(b_1,...,b_n)\in\mathcal{B}$. Soit $k\in\underline{K}(\mathbf{b})$, appliquons (8) à $x=k^{-1}v_0$. Il y a $k'\in\underline{K}'\cap a\underline{K}'a^{-1}$ et $\gamma\in\Gamma$ tels que $k'k^{-1}v_0=a(\mathbf{b})\gamma^{-1}v_0$. Fixons de tels éléments et posons $h=kk'^{-1}a(\mathbf{b})\gamma^{-1}$. Alors $hv_0=v_0$, c'est-à-dire $h\in H(F)$. On a $k=h\gamma a(\mathbf{b})^{-1}k'$, donc $\pi(ka)e=\pi(h\gamma a(\mathbf{b})^{-1}a)e'$, où $e'=\pi(a^{-1}k'a)e$. Notons x l'élément de X'' tel que $\gamma=\gamma_x$. Montrons que

(10) il existe des sous-groupes ouverts compacts $\underline{K}_1\subset P'(F)\cap H^x(F)$ et $\underline{K}_2\subset\bar{P}(F)$, indépendants des variables a, $\mathbf{b}$ et k, tels que la fonction

$$(k_1,k_2)\mapsto(\epsilon,l(\pi(h\gamma k_1k_2a(\mathbf{b})^{-1}a)e'))$$

soit constante sur $\underline{K}_1\times\underline{K}_2$.

Puisque $a^{-1}k'a \in \underline{K}'$, le vecteur e' appartient à un ensemble fini indépendant des variables. D'autre part, par définition de $\mathcal{B}'$, on a $a(\mathbf{b})^{-1}a \in A_{min}(F)^-$. La conjugaison par $a(\mathbf{b})a^{-1}$ contracte $\bar{P}$. Il existe donc $\underline{K}_2$ comme ci-dessus tel que $\pi(k_2a(\mathbf{b})^{-1}a)e' = \pi(a(\mathbf{b})^{-1}a)e'$ pour tout $k_2 \in \underline{K}_2$. Considérons l'application $k_1 \mapsto h\gamma k_1\gamma^{-1}h^{-1}$ sur $P'(F) \cap H^x(F)$. Elle prend ses valeurs dans $H(F)$ car $\gamma H^x\gamma^{-1} = H$. D'autre part, elle est "bornée" en un sens facile à préciser. En effet, on a $h\gamma = kk'^{-1}a(\mathbf{b})$; les racines de $a(\mathbf{b})$ dans $\mathfrak{p}'$ sont bornées par définition de $\mathcal{B}$ et k et k' appartiennent à des compacts. Il existe donc $\underline{K}_1$ comme dans l'énoncé tel que $\rho(h\gamma k_1^{-1}\gamma^{-1}h^{-1})\epsilon = \epsilon$ pour tout $k_1 \in \underline{K}_1$. D'où (10).

Grâce à (9) et (10), et à la finitude de Γ, il existe un sous-groupe ouvert compact $\underline{K}''$ de $G(F)$, indépendant des variables, tel que la fonction

$$k'' \mapsto (\epsilon, l(\pi(h\gamma k''a(\mathbf{b})^{-1}a)e'))$$

soit constante sur $\underline{K}''$. Fixons un tel $\underline{K}''$. On a alors

$$(\epsilon, l(\pi(ka)e)) = (\epsilon, l(\pi(h\gamma a(\mathbf{b})^{-1}a)e')) = (\epsilon, l(\pi(h\gamma)e'')),$$

où

$$e'' = mes(\underline{K}'')^{-1}\int_{\underline{K}''}\pi(k''a(\mathbf{b})^{-1}a)e'\,dk''.$$

Fixons une base orthonormée $(e_j)_{j=1,...,k}$ du sous-espace $E_\pi^{\underline{K}''}$. On a

$$e'' = \sum_{j=1,...,k}(e_j, e'')e_j,$$

d'où

$$(\epsilon, l(\pi(ka)e)) = \sum_{j=1,...,k}(\epsilon, l(\pi(h\gamma)e_j))(e_j, e'').$$

Pour tout j, on a $(e_j, e'') = (e_j, \pi(a(\mathbf{b})^{-1}a(a^{-1}k'a))e)$. Rappelons que $a^{-1}k'a \in \underline{K}'$. D'où une majoration

$$|(e_j, e'')| << \Xi^G(a(\mathbf{b})^{-1}a).$$

On a aussi

$$|(\epsilon, l(\pi(h\gamma)e_j))| = |(\rho(h^{-1})\epsilon, l(\pi(\gamma)e_j))| << \Xi^H(h).$$

Rappelons que $h = kk'^{-1}a(\mathbf{b})\gamma^{-1}$ et que l'on a noté x l'élément de X'' tel que $\gamma = \gamma_x$. Ecrivons $x = y + \sum_{i=\iota,...,n}x_iv_i$ avec $y \in E$ si $\iota = 1$, $y = x_1^{-1}v_{-1} + x_1v_1$ si $\iota = 2$. On a $x = exp(c(y,(y-x)/2))y$. Posons $\gamma_0 = \gamma exp(c(y,(x-y)/2))$. Alors $\gamma_0^{-1}v_0 = y$. Notons H^y le sous-groupe des éléments de G qui fixent y. On a $\gamma_0^{-1}H\gamma_0 = H^y$ et une majoration

$$\Xi^H(h) << \Xi^{H^y}(\gamma_0^{-1}h\gamma_0).$$

On a $\gamma_0^{-1}h\gamma_0 = \gamma_0^{-1}kk'^{-1}a(\mathbf{b})exp(c(y,(x-y)/2))$. Introduisons l'élément $a(\mathbf{b})' \in A_{min}(F)$ tel que

- si $\iota = 1$, $a(\mathbf{b})'_i = \varpi_F^{b_i+nl}$ pour $i = 1, ..., n$;
- si $\iota = 2$, $a(\mathbf{b})'_i = \varpi_F^{b_i-b_1}$ pour $i = 1, ..., n$.

On a

$$\gamma_0^{-1}h\gamma_0 = k_1a(\mathbf{b})''u'a(\mathbf{b})',$$

où $k_1 = \gamma_0kk'^{-1}$, $a(\mathbf{b})'' = a(\mathbf{b})a(\mathbf{b})'^{-1}$, $u' = a(\mathbf{b})'exp(c(y,(x-y)/2))a(\mathbf{b})'^{-1}$. Remarquons que $a(\mathbf{b})'$ appartient à $H^y(F)$, donc aussi $k_1a(\mathbf{b})''u' \in H^y(F)$. L'élément k_1 reste dans un compact. D'après la définition de $\mathcal{B}$, l'élément $a(\mathbf{b})''$ reste lui-aussi dans un compact. Enfin $c(y,(x-y)/2)$ appartient à $\mathfrak{u}'(F)$ et la conjugaison par $a(\mathbf{b})'$ contracte cet ensemble. Donc u' reste dans un compact. On en déduit une majoration

$$\Xi^{H^y}(\gamma_0^{-1}h\gamma_0) << \Xi^{H^y}(a(\mathbf{b})'),$$

puis

$$|(\epsilon, l(\pi(ka)e))| << \Xi^{H^y}(a(\mathbf{b})')\Xi^G(a(\mathbf{b})^{-1}a).$$

Les éléments $a(\mathbf{b})^{-1}a$ et $a(\mathbf{b})'$ sont "négatifs" pour P_{min}, resp. $P'\cap H^y$. D'après [W2] lemme II.1.1, il existe un réel D tel que le membre de droite ci-dessus soit essentiellement borné par

$$\delta_{P'\cap H^y}(a(\mathbf{b})')^{1/2}\delta_{P_{min}}(a(\mathbf{b})^{-1}a)^{1/2}\sigma(a(\mathbf{b})')^D\sigma(a(\mathbf{b})a)^D.$$

Les coefficients de $a(\mathbf{b})'$ sont essentiellement les mêmes que ceux de $a(\mathbf{b})$. En calculant explicitement l'expression ci-dessus, on obtient la majoration

$$|(\epsilon, l(\pi(ka)e))| << q^{\sum_{i=1,\dots,n} b_i/2}\sigma(a(\mathbf{b}))^D\Xi^G(a)\sigma(a)^D.$$

L'application $k\mapsto k^{-1}v_0$ de $(\underline{K}\cap H(F))\backslash\underline{K}(\mathbf{b})$ dans $X(\mathbf{b})$ est injective et préserve les mesures. D'après (4), on a donc

$$mes(\underline{K}(\mathbf{b})) << q^{-\sum_{i=1,\dots,n} b_i},$$

puis

$$I_{\underline{K}(\mathbf{b})}(\epsilon,e,a) << q^{-\sum_{i=1,\dots,n} b_i/2}\sigma(a(\mathbf{b}))^D\Xi^G(a)\sigma(a)^D,$$

et enfin

$$I_{\underline{K}}(\epsilon,e,a) << \Xi^G(a)\sigma(a)^D\sum_{\mathbf{b}\in\mathcal{B}} q^{-\sum_{i=1,\dots,n} b_i/2}\sigma(a(\mathbf{b}))^D.$$

L'ensemble $\mathcal{B}$ dépend de a mais est contenu dans l'ensemble des $(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{Z}^n$ tels que $b_i\geq -nl$ pour tout i. On peut remplacer $\mathcal{B}$ par cet ensemble, la série ci-dessus y est convergente et on obtient la majoration

$$I_{\underline{K}}(\epsilon,e,a) << \Xi^G(a)\sigma(a)^D$$

que l'on voulait démontrer. Cela achève la preuve. $\square$

5.6 Le cas $r=0$: tout entrelacement est tempéré

Soient (V,q_V) et (W,q_W) deux espaces quadratiques compatibles. Soient $\pi\in Temp(G)$ et $\rho\in Temp(H)$.

Proposition. *Supposons $d_V=d_W+1$. Alors $m(\pi,\rho)=1$ si et seulement si $\mathcal{L}_{\pi,\rho}$ n'est pas nulle.*

Preuve. Pour une raison qui va apparaître, modifions la notation en notant π' plutôt que π la représentation de $G(F)$. Un sens de l'équivalence ("si") est clair d'après 5.1. On doit prouver que, si $Hom_{H,\xi}(\pi',\rho)$ n'est pas nul, $\mathcal{L}_{\pi',\rho}$ ne l'est pas non plus. Puisque π' est tempérée, on peut fixer des données comme en 5.3, avec de plus $\tilde{\pi}$, $\mu_1,\dots,\mu_s$ de la série discrète, de sorte que π' soit une sous-représentation de la représentation induite

$\pi = \pi_0$. On peut supposer que $E_{\pi'} \subset \mathcal{K}^G_{Q,\tau}$. Soient $e, e' \in \mathcal{K}^G_{Q,\tau}$ et φ une fonction C^∞ sur $i\mathcal{A}^*_{L,F}$. Comme en 1.6, définissons une fonction $f = f_{e,e',\varphi}$ sur $G(F)$ par

$$f(g) = \int_{i\mathcal{A}^*_{L,F}} \varphi(\lambda)(\pi_\lambda(g)e', e)m(\tau_\lambda)d\lambda.$$

Elle appartient à l'espace de Schwartz-Harish-Chandra $\mathcal{S}(G(F))$ et agit donc dans π'. Par définition de cette action, on a

$$(e'_0, \pi'(f)e_0) = \int_{G(F)} (e'_0, \pi'(g)e_0)f(g)dg$$

pour tous $e_0, e'_0 \in E_{\pi'}$. Soit $l \in Hom_{H,\xi}(\pi', \rho)$, supposons $l \neq 0$. Soient $e_0 \in E_{\pi'}$ et $\epsilon \in E_\rho$. Posons

$$I(\epsilon, e_0, f) = \int_{G(F)} (\epsilon, l(\pi(g)e_0))f(g)dg.$$

Grâce à la proposition 5.5, cette intégrale est absolument convergente. On peut la calculer de deux façons. La première consiste à fixer un sous-groupe ouvert compact K_f de $G(F)$ tel que f soit biinvariante par K_f et une suite $(\Omega_n)_{n\geq 1}$ de sous-ensembles ouverts compacts de $G(F)$ biinvariants par K_f, telle que

$$\Omega_n \subset \Omega_{n+1}, \text{ et } \bigcup_{n\geq 1} \Omega_n = G(F).$$

Alors

$$I(\epsilon, e_0, f) = lim_{n\to\infty} \int_{\Omega_n} (\epsilon, l(\pi'(g)e_0))f(g)dg.$$

Considérons cette dernière intégrale. Puisqu'elle est limitée à un compact, on a

$$\int_{\Omega_n} (\epsilon, l(\pi'(g)e_0))f(g)dg = (\epsilon, l(e_n)),$$

où

$$e_n = \int_{\Omega_n} \pi'(g)f(g)dg.$$

Ces vecteurs restent dans le sous-espace de dimension finie $E^{K_f}_{\pi'}$. De plus, dans ce sous-espace, $lim_{n\to\infty} e_n = \pi'(f)e_0$. On en déduit

$$lim_{n\to\infty}(\epsilon, l(e_n)) = (\epsilon, l(\pi'(f)e_0)),$$

puis

$$(1) \qquad I(\epsilon, e_0, f) = (\epsilon, l(\pi'(f)e_0)).$$

D'autre part, on a

$$I(\epsilon, e_0, f) = \int_{H(F)\backslash G(F)} I(\epsilon, e_0, f, g)dg,$$

où

$$I(\epsilon, e_0, f, g) = \int_{H(F)} (\epsilon, l(\pi'(hg)e_0))f(hg)dh$$

$$= \int_{H(F)} (\epsilon, l(\pi'(hg)e_0)) \int_{i\mathcal{A}^*_{L,F}} \varphi(\lambda)(\pi_\lambda(hg)e', e)m(\tau_\lambda)d\lambda\, dh.$$

Fixons g. La dernière intégrale est absolument convergente. En effet, quand on remplace tous les termes par leurs valeurs absolues, il existe un entier D tel que l'intégrale intérieure soit $<< \Xi^G(h)\sigma(h)^D$. Le premier terme est $<< \Xi^H(h)$ et l'assertion résulte de 4.3(4). On permute les deux intégrales, on utilise l'égalité $(\epsilon, l(\pi'(hg)e_0)) = (\rho(h)^{-1}\epsilon, l(\pi(g)e_0))$ et on change h en h^{-1}. On obtient

$$I(\epsilon, e_0, f, g) = \int_{i\mathcal{A}_{L,F}^*} \varphi(\lambda)m(\tau_\lambda) \int_{H(F)} (\rho(h)\epsilon, l(\pi'(g)e_0))(\pi_\lambda(g)e', \pi_\lambda(h)e)dh\, d\lambda.$$

On reconnaît l'intégrale intérieure : c'est $\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\rho}(\epsilon \otimes \pi_\lambda(g)e', l(\pi'(g)e_0) \otimes e)$. On obtient

$$(2) \qquad I(\epsilon, e_0, f) = \int_{H(F)\backslash G(F)} \int_{i\mathcal{A}_{L,F}^*} \varphi(\lambda)m(\tau_\lambda)\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\rho}(\epsilon \otimes \pi_\lambda(g)e', l(\pi'(g)e_0) \otimes e)d\lambda\, dg.$$

Fixons un voisinage ω de 0 dans $i\mathcal{A}_{L,F}^*$ tel que la relation 1.6(1) soit vérifiée. Fixons $\epsilon \in E_\rho$ et $e_0 \in E_{\pi'}$ tels que $(\epsilon, l(e_0)) \neq 0$. Appliquons les constructions ci-dessus à $e = e' = e_0$ et à une fonction φ à support dans ω telle que $\varphi(0) \neq 0$. La relation 1.6(1) nous dit que $\pi'(f)(e_0)$ est un multiple non nul de e_0. D'après (1), on a donc $I(\epsilon, e_0, f) \neq 0$. Alors (2) implique qu'il existe λ tel que $\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\rho}$ ne soit pas nul. D'après le lemme 5.3(ii), $\mathcal{L}_{\pi,\rho}$ n'est pas nul. Si π est irréductible, on a $\pi' = \pi$ et c'est terminé. Sinon, d'après le lemme 5.4, il y a une sous-représentation irréductible π'' de π telle que $\mathcal{L}_{\pi'',\rho}$ ne soit pas nul. D'après 5.1(2) on peut fixer $e_1 \in E_{\pi''} \subset \mathcal{K}_{Q,\tau}^G$ et $\epsilon_1 \in E_\rho$ de sorte que $\mathcal{L}_{\pi,\rho}(\epsilon_1 \otimes e_1, \epsilon_1 \otimes e_1) \neq 0$. Notons c la valeur non nulle de ce terme. D'après le lemme 5.3(i), quitte à restreindre ω, on peut supposer que $|\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\rho}(\epsilon_1 \otimes e_1, \epsilon_1 \otimes e_1)| \geq |c|/2$ pour $\lambda \in \omega$. Soit φ' la fonction à support dans ω telle que, pour $\lambda \in \omega$,

$$\varphi'(\lambda) = \varphi(\lambda)\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\rho}(\epsilon \otimes e_1, \epsilon_1 \otimes e_0)\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\rho}(\epsilon_1 \otimes e_1, \epsilon_1 \otimes e_1)^{-1}.$$

C'est une fonction C^∞. Posons $f' = f_{e_1,e_0,\varphi'}$. Montrons que l'on a l'égalité

$$(3) \qquad I(\epsilon, e_0, f) = I(\epsilon_1, e_0, f').$$

D'après (2), il suffit de prouver que, pour tous λ et g, on a l'égalité

$$\varphi(\lambda)\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\rho}(\epsilon \otimes \pi_\lambda(g)e_0, l(\pi'(g)e_0) \otimes e_0) = \varphi'(\lambda)\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\rho}(\epsilon_1 \otimes \pi_\lambda(g)e_0, l(\pi'(g)e_0) \otimes e_1).$$

Tous les termes étant C^∞, on peut supposer λ en position générale, donc π_λ irréductible. On peut aussi supposer $\lambda \in \omega$. Fixons un tel λ et un élément non nul $\underline{l} \in Hom_H(\pi_\lambda, \rho)$. D'après 5.1, il existe $c \in \mathbb{C}^\times$ tel que

$$\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\rho}(\underline{\epsilon}' \otimes \underline{e}', \underline{\epsilon} \otimes \underline{e}) = c(\underline{\epsilon}', \underline{l}(\underline{e}))(\underline{l}(\underline{e}'), \underline{\epsilon})$$

pour tous $\underline{e}, \underline{e}' \in \mathcal{K}_{Q,\tau}^G$ et $\underline{\epsilon}, \underline{\epsilon}' \in E_\rho$. Les deux membres de l'égalité à prouver valent

$$c\varphi(\lambda)(\epsilon, \underline{l}(e_0))(\underline{l}(\pi_\lambda(g)e_0), l(\pi'(g)e_0)).$$

Cela prouve cette égalité et (3). D'après (3), $I(\epsilon_1, e_0, f') \neq 0$. D'après (1), $\pi'(f')e_0 \neq 0$. Alors, d'après 1.6(1), le produit scalaire (e_0, e_1) n'est pas nul. Puisque $e_0 \in E_{\pi'}$ et $e_1 \in E_{\pi''}$, on a donc $\pi' = \pi''$ et $\mathcal{L}_{\pi',\rho}$ est non nul par définition de π''. $\square$

5.7 Tout entrelacement est tempéré

Soient (V, q_V) et (W, q_W) deux espaces quadratiques compatibles. Soit $\pi \in Temp(G)$ et $\rho \in Temp(H)$.

Proposition. *On a $m(\pi, \rho) = 1$ si et seulement si $\mathcal{L}_{\pi,\rho}$ est non nul.*

Preuve. On peut supposer $d_V > d_W$. Le cas $d_V = d_W + 1$ est traité par la proposition précédente. Supposons $d_V \geq d_W + 3$. Comme dans la preuve précédente, on peut supposer $m(\pi, \rho) = 1$ et on doit montrer que $\mathcal{L}_{\pi,\rho}$ n'est pas nul. Posons $k = (d_V - d_W + 1)/2$. Soit $(Z', q_{Z'})$ un espace hyperbolique de dimension $2k$, notons $(V', q_{V'})$ la somme directe orthogonale de W et Z'. Alors $(V', q_{V'})$ et (V, q_V) sont compatibles et $d_{V'} = d_V + 1$. Le groupe spécial orthogonal G' de V' contient un groupe de Lévi L' isomorphe à $GL_k \times H$. Soient $P' \in \mathcal{P}(L')$ et γ une représentation admissible irréductible et cuspidale de $GL_k(F)$. Posons $\rho' = Ind_{P'}^{G'}(\gamma \otimes \rho)$. D'après le théorème 20.1 de [GGP], on peut choisir γ de sorte que d'une part ρ' soit irréductible, d'autre part l'hypothèse $m(\pi, \rho) = 1$ entraîne $m(\rho', \pi) = 1$. On fixe un tel γ. Grâce à la proposition 5.6, la forme $\mathcal{L}_{\rho',\pi}$ n'est pas nulle. Grâce au lemme 5.3(ii), la forme $\mathcal{L}_{\pi,\rho}$ est elle-aussi non nulle. C'est ce qu'il fallait prouver. $\square$

6 Expression spectrale de la limite d'une intégrale

6.1 Le théorème

Soient (V, q_V) et (W, q_W) deux espaces quadratiques compatibles. On suppose $d_V > d_W$. On utilise les constructions et notations de 4.2. On fixe un Lévi minimal M_{min} de G contenu dans M. On suppose, ainsi qu'il est loisible, que le groupe K est en bonne position relativement à M_{min}. On fixe des mesures de Haar sur $G(F)$ et $H(F)$. Les autres mesures que l'on utilisera sont normalisées comme en 1.2. On fixe une représentation $\rho \in Temp(H)$ et on note θ_ρ son caractère. Soit $f \in C_c^\infty(G(F))$. Pour $g \in G(F)$, on définit une fonction ${}^g f^\xi$ sur $H(F)$ par

$${}^g f^\xi(h) = \int_{U(F)} f(g^{-1}hug)\xi(u)du$$

et on pose

$$I(\theta_\rho, f, g) = \int_{H(F)} \theta_\rho(h){}^g f^\xi(h)dh.$$

Pour un entier $N \geq 1$, on pose

$$I_N(\theta_\rho, f) = \int_{U(F)H(F)\backslash G(F)} I(\theta_\rho, f, g)\kappa_N(g)dg.$$

Pour $L \in \mathcal{L}(M_{min})$, notons $\Pi_{ell}(L)$ l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations admissibles irréductibles tempérées et elliptiques de $L(F)$. Cet ensemble se décompose en orbites pour l'action $\pi \mapsto \pi_\lambda$ de $i\mathcal{A}_L^*$. On note $\{\Pi_{ell}(L)\}$ l'ensemble des orbites. Soient $\mathcal{O}$ une telle orbite et $\pi \in \mathcal{O}$. Ecrivons

$$L = GL_{k_1} \times ... \times GL_{k_s} \times \tilde{G},$$

$$\pi = \mu_1 \otimes ... \otimes \mu_s \otimes \tilde{\pi}.$$

La représentation $\tilde{\pi}$ ne dépend pas du choix de π dans $\mathcal{O}$. D'autre part, $\tilde{G}$ est le groupe spécial orthogonal d'un sous-espace $\tilde{V}$ de V qui est compatible à W. On définit comme en 4.1 et 5.1 les nombres $t(\tilde{\pi})$ et $m(\tilde{\pi}, \rho)$. On pose $t(\pi) = t(\tilde{\pi})$ et $m(\mathcal{O}, \rho) = m(\pi, \rho) = m(\tilde{\pi}, \rho)$. Notons aussi $i\mathcal{A}_{\mathcal{O}}^{\vee}$ le groupe des $\lambda \in i\mathcal{A}_L^*$ tels que, pour tout $\pi \in \mathcal{O}$, π_λ soit équivalente à π. On pose

$$I_{spec}(\theta_\rho, f) = \sum_{L \in \mathcal{L}(M_{min})} |W^L||W^G|^{-1}(-1)^{a_L} \sum_{\mathcal{O} \in \{\Pi_{ell}(L)\}; m(\mathcal{O},\rho)=1}$$

$$[i\mathcal{A}_{\mathcal{O}}^{\vee} : i\mathcal{A}_{L,F}^{\vee}]^{-1} t(\pi)^{-1} \int_{i\mathcal{A}_{L,F}^*} J_L^G(\pi_\lambda, f) d\lambda,$$

où, pour toute orbite $\mathcal{O}$, on a fixé un élément $\pi \in \mathcal{O}$. La fonction $\lambda \mapsto J_L^G(\pi_\lambda, f)$ est C^∞. Si l'on fixe un sous-groupe ouvert compact K_f de $G(F)$ tel que f soit biinvariante par K_f, elle n'est non nulle que si π admet des invariants non nuls par K_f. Il n'y a qu'un nombre fini d'orbites $\mathcal{O}$ vérifiant cette condition. L'expression ci-dessus est donc absolument convergente.

Théorème. *Soit $f \in C_c^\infty(G(F))$. Si f est très cuspidale, on a l'égalité*

$$lim_{N \to \infty} I_N(\theta_\rho, f) = I_{spec}(\theta_\rho, f).$$

Toute la section est consacrée à la preuve de ce théorème. Pour toute cette section, on fixe une fonction $f \in C_c^\infty(G(F))$, que l'on suppose très cuspidale. On fixe un sous-groupe ouvert compact K_f de K, distingué dans K, tel que f soit biinvariante par K_f.

6.2 Utilisation de la formule de Plancherel

Exprimons f à l'aide de la formule de Plancherel. Comme on l'a dit en 1.6, pour tout $L \in \mathcal{L}(M_{min})$, on peut fixer un sous-ensemble fini $\Pi_2(L)_f \subset \Pi_2(L)$ de sorte que pour tout $g \in G(F)$,

$$f(g) = \sum_{L \in \mathcal{L}(M_{min})} |W^L||W^G|^{-1} \sum_{\mathcal{O} \in \Pi_2(L)_f} f_{\mathcal{O}}(g),$$

où

$$f_{\mathcal{O}}(g) = [i\mathcal{A}_{\mathcal{O}}^{\vee} : i\mathcal{A}_{L,F}^{\vee}]^{-1} \int_{i\mathcal{A}_{L,F}^*} m(\tau_\lambda) trace(Ind_Q^G(\tau_\lambda, g^{-1}) Ind_Q^G(\tau_\lambda, f)) \, d\lambda.$$

On a remplacé M et P par L et Q dans la formule de 1.6. Pour $g \in G(F)$ et $h \in H(F)$, on a donc

$$^g f^\xi(h) = \int_{U(F)} \sum_{L \in \mathcal{L}(M_{min})} |W^L||W^G|^{-1} \sum_{\mathcal{O} \in \Pi_2(L)_f} f_{\mathcal{O}}(g^{-1}hug)\xi(u) \, du.$$

On fixe un produit scalaire invariant sur E_ρ. Soit $N \geq 1$. Le support de la fonction κ_N restreinte à $M(F)$ est d'image compacte dans $H(F)\backslash M(F)$. On fixe un sous-ensemble ouvert compact Γ_N de $M(F)$ tel que ce support soit contenu dans $H(F)\Gamma_N$. On fixe un sous-groupe ouvert compact K_N de $H(F)$ tel que, pour tout $g \in \Gamma_N$, K_N soit contenu dans $gK_f g^{-1}$. Pour $g \in \Gamma_N K$, la fonction ${}^g f^{\xi}$ sur $H(F)$ est biinvariante par K_N. Fixons une base orthonormée $\mathcal{B}_{\rho}^{K_N}$ du sous-espace $E_{\rho}^{K_N}$ des éléments de E_ρ invariants par K_N. Alors, pour $g \in \Gamma_N K$, on a l'égalité

$$I(\theta_\rho, f, g) = \sum_{\epsilon \in \mathcal{B}_{\rho}^{K_N}} \int_{H(F)} (\epsilon, \rho(h)\epsilon)\, {}^g f^{\xi}(h) dh,$$

d'où

$$I(\theta_\rho, f, g) = \sum_{\epsilon \in \mathcal{B}_{\rho}^{K_N}} \int_{H(F)} (\epsilon, \rho(h)\epsilon) \int_{U(F)} \sum_{L \in \mathcal{L}(M_{min})} |W^L||W^G|^{-1}$$
$$\sum_{\mathcal{O} \in \Pi_2(L)_f} f_{\mathcal{O}}(g^{-1}hug)\xi(u)\, du\, dh.$$

Pour $\epsilon \in E_\rho$, $L \in \mathcal{L}(M_{min})$, $\mathcal{O} \in \Pi_2(L)_f$, et $g \in G(F)$, posons

$$(1) \qquad I_{L,\mathcal{O}}(\epsilon, f, g) = \int_{H(F)\times U(F)} (\epsilon, \rho(h)\epsilon) f_{\mathcal{O}}(g^{-1}hug)\xi(u)\, du\, dh.$$

On a

(2) cette expression est absolument convergente.

D'après Harish-Chandra ([W2] proposition VI.3.1), la fonction $f_{\mathcal{O}}$ appartient à l'espace de Schwartz-Harish-Chandra $\mathcal{S}(G(F))$. D'après [W2] proposition II.4.5, pour tout entier D, on a une majoration

$$\int_{U(F)} |f_{\mathcal{O}}(g^{-1}hug)| du << \delta_P(h)^{-1/2} \Xi^M(h) \sigma(h)^{-D}$$

pour tout $h \in H(F)$. Sur $H(F)$, le module δ_P est trivial et Ξ^M coïncide avec Ξ^{G_0} . D'autre part, on a une majoration

$$|(\epsilon, \rho(h)\epsilon)| << \Xi^H(h)$$

pour tout $h \in H(F)$. Enfin, l'intégrale

$$\int_{H(F)} \Xi^H(h) \Xi^{G_0}(h) dh$$

est convergente d'après 4.3(4). Cela prouve (2).

Pour $g \in \Gamma_N K$, on a donc l'égalité

$$(3) \qquad I(\theta_\rho, f, g) = \sum_{\epsilon \in \mathcal{B}_{\rho}^{K_N}} \sum_{L \in \mathcal{L}(M_{min})} |W^L||W^G|^{-1} \sum_{\mathcal{O} \in \Pi_2(L)_f} I_{L,\mathcal{O}}(\epsilon, f, g).$$

6.3 Apparition des entrelacements tempérés

On poursuit le calcul précédent. Fixons $L \in \mathcal{L}(M_{min})$ et $\mathcal{O} \in \Pi_2(L)_f$. Pour $c \in \mathbb{N}$, introduisons le sous-groupe $U(F)_c$ de $U(F)$, cf. 4.3. On a

(1) il existe $c_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $c \geq c_0$, tout $g \in M(F)K$ et tout $h \in H(F)$, on ait l'égalité

$$\int_{U(F)} f_{\mathcal{O}}(g^{-1}hug)\xi(u)\, du = \int_{U(F)_c} f_{\mathcal{O}}(g^{-1}hug)\xi(u)\, du.$$

La preuve est similaire à celle du lemme 3.5. Pour $c \geq c_0$ notons $U(F)_c - U(F)_{c_0}$ le complémentaire de $U(F)_{c_0}$ dans $U(F)_c$. Il existe c_0 tel que pour tout $c \geq c_0$ et tout $u \in U(F)_c - U(F)_{c_0}$, l'intégrale

$$\int_{A(F)\cap K_f} \xi(aua^{-1})da$$

soit nulle. Choisissons un tel c_0, soit $c \geq c_0$. Parce que A commute à M et à $H \subset M$, parce que K_f est distingué dans K et parce que $f_{\mathcal{O}}$ est, comme f, biinvariante par K_f, on a l'égalité

$$f_{\mathcal{O}}(g^{-1}hug) = f_{\mathcal{O}}(g^{-1}ha^{-1}uag)$$

pour tous $g \in M(F)K$, $h \in H(F)$, $a \in A(F) \cap K_f$. Alors

$$(2) \qquad \int_{U(F)_c - U(F)_{c_0}} f_{\mathcal{O}}(g^{-1}hug)\xi(u)\, du = (mes(A(F)\cap K_f))^{-1}$$

$$\int_{U(F)_c - U(F)_{c_0}} \int_{A(F)\cap K_f} f_{\mathcal{O}}(g^{-1}ha^{-1}uag)\xi(u)\, da\, du.$$

Cette expression est absolument convergente. On peut effectuer le changement de variable $u \mapsto aua^{-1}$ et l'expression ci-dessus devient

$$(mes(A(F)\cap K_f))^{-1} \int_{U(F)_c - U(F)_{c_0}} f_{\mathcal{O}}(g^{-1}hug) \int_{A(F)\cap K_f} \xi(aua^{-1})da\, du.$$

L'intégrale intérieure est nulle donc aussi le membre de gauche de (2). Cela suffit à prouver (1).

Comme en 1.6, on fixe $\tau \in \mathcal{O}$ et un élément $Q \in \mathcal{P}(L)$. Pour simplifier les notations, on pose

$$\pi_\lambda = Ind_Q^G(\tau_\lambda)$$

pour tout $\lambda \in i\mathcal{A}^*_{L,F}$. On réalise toutes les représentations π_λ dans l'espace commun $\mathcal{K}^G_{Q,\tau}$. Fixons une base orthonormée $\mathcal{B}^{K_f}_{\mathcal{O}}$ du sous-espace $(\mathcal{K}^G_{Q,\tau})^{K_f}$. Pour tout $g \in G(F)$, on a l'égalité

$$f_{\mathcal{O}}(g) = [i\mathcal{A}^\vee_{\mathcal{O}} : i\mathcal{A}^\vee_{L,F}]^{-1} \sum_{e \in \mathcal{B}^{K_f}_{\mathcal{O}}} \int_{i\mathcal{A}^*_{L,F}} m(\tau_\lambda)(e, \pi_\lambda(g^{-1})\pi_\lambda(f)e)\, d\lambda.$$

Soient c_0 vérifiant (1), $c \geq c_0$, $g \in M(F)K$ et $\epsilon \in E_\rho$. D'après (1) et la définition 6.2(1), on a l'égalité

$$I_{L,\mathcal{O}}(\epsilon, f, g) = [i\mathcal{A}^\vee_{\mathcal{O}} : i\mathcal{A}^\vee_{L,F}]^{-1} \int_{H(F)\times U(F)_c} (\epsilon, \rho(h)\epsilon)$$

$$\sum_{e\in\mathcal{B}_{\mathcal{O}}^{K_f}}\int_{i\mathcal{A}_{L,F}^*} m(\tau_\lambda)(\pi_\lambda(g)e,\pi_\lambda((hu)^{-1}g)\pi_\lambda(f)e)\xi(u)\,d\lambda\,du\,dh.$$

En changeant h et u en leurs inverses, on obtient

$$I_{L,\mathcal{O}}(\epsilon,f,g)=[i\mathcal{A}_{\mathcal{O}}^\vee:i\mathcal{A}_{L,F}^\vee]^{-1}\int_{H(F)\times U(F)_c}(\rho(h)\epsilon,\epsilon)$$

$$\sum_{e\in\mathcal{B}_{\mathcal{O}}^{K_f}}\int_{i\mathcal{A}_{L,F}^*} m(\tau_\lambda)(\pi_\lambda(g)e,\pi_\lambda(hug)\pi_\lambda(f)e)\bar{\xi}(u)\,d\lambda\,du\,dh.$$

Remarquons que, pour g fixé, on a une majoration

$$|(\pi_\lambda(g)e,\pi_\lambda(hug)\pi_\lambda(f)e)|<<\Xi^G(hu)$$

pour tous λ, h, u. Grâce à 4.3(4), on en déduit que l'expression ci-dessus est absolument convergente. On peut donc permuter les intégrales :

$$I_{L,\mathcal{O}}(\epsilon,f,g)=[i\mathcal{A}_{\mathcal{O}}^\vee:i\mathcal{A}_{L,F}^\vee]^{-1}\sum_{e\in\mathcal{B}_{\mathcal{O}}^{K_f}}\int_{i\mathcal{A}_{L,F}^*} m(\tau_\lambda)$$

$$\int_{H(F)\times U(F)_c}(\rho(h)\epsilon,\epsilon))(\pi_\lambda(g)e,\pi_\lambda(hug)\pi_\lambda(f)e)\bar{\xi}(u)du\,dh\,d\lambda.$$

On reconnaît l'intégrale intérieure : c'est $\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\rho,c}(\epsilon\otimes\pi_\lambda(g)e,\epsilon\otimes\pi_\lambda(g)\pi_\lambda(f)e)$. D'après le lemme 5.1, quitte à accroître c_0 (en fait, la preuve de (1) montre que ce n'est pas nécessaire), c'est aussi $\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\rho}(\epsilon\otimes\pi_\lambda(g)e,\epsilon\otimes\pi_\lambda(g)\pi_\lambda(f)e)$. On obtient

$$(3)\qquad I_{L,\mathcal{O}}(\epsilon,f,g)=[i\mathcal{A}_{\mathcal{O}}^\vee:i\mathcal{A}_{L,F}^\vee]^{-1}\sum_{e\in\mathcal{B}_{\mathcal{O}}^{K_f}}\int_{i\mathcal{A}_{L,F}^*} m(\tau_\lambda)$$

$$\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\rho}(\epsilon\otimes\pi_\lambda(g)e,\epsilon\otimes\pi_\lambda(g)\pi_\lambda(f)e)d\lambda$$

pour tout $g\in M(F)K$.

On peut écrire L et τ comme en 5.3. C'est-à-dire que

$$L=GL_{k_1}\times...\times GL_{k_s}\times\tilde{G}$$

et $\tau=\mu_1\otimes...\otimes\mu_s\otimes\tilde{\pi}$. Si $m(\tilde{\pi},\rho)=0$, on a aussi $\mathcal{L}_{\tilde{\pi},\rho}=0$ d'après la proposition 5.7 et $\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\rho}=0$ pour tout λ d'après le lemme 5.3(ii). Posons $m(\mathcal{O},\rho)=m(\tilde{\pi},\rho)$. Alors

(4) si $m(\mathcal{O},\rho)=0$, $I_{L,\mathcal{O}}(\epsilon,f,g)=0$ pour tout $g\in M(F)K$ et tout $\epsilon\in E_\rho$.

Supposons désormais $m(\mathcal{O},\rho)=1$. On fixe des familles $(\epsilon'_j)_{j=1,...,n}$, $(\epsilon_j)_{j=1,...,n}$, $(e'_j)_{j=1,...,n}$, $(e_j)_{j=1,...,n}$, $(\varphi_j)_{j=1,...,n}$ vérifiant le lemme 5.3(iii). Soit $N\geq 1$. Pour $\lambda\in i\mathcal{A}_{L,F}^*$, $g\in M(F)K$ et $e\in\mathcal{K}_{Q,\tau}^G$, considérons la somme

$$X_\lambda(e,g)=\sum_{\epsilon\in\mathcal{B}_\rho^{K_N}}\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\rho}(\epsilon\otimes\pi_\lambda(g)e,\epsilon\otimes\pi_\lambda(g)\pi_\lambda(f)e).$$

Supposons λ en position générale. Alors π_λ est irréductible. Fixons un élément non nul $l_\lambda\in Hom_{H,\xi}(\pi_\lambda,\rho)$. Comme on l'a dit en 5.1, il existe un nombre complexe non nul c_λ tel que

$$\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\rho}(\epsilon'\otimes e',\epsilon\otimes e)=c_\lambda(\epsilon',l_\lambda(e))(l_\lambda(e'),\epsilon)$$

pour tous $\epsilon, \epsilon' \in E_\rho$, $e, e' \in \mathcal{K}^G_{Q,\tau}$. La propriété (iii) du lemme 5.3 s'écrit

$$(5) \qquad \sum_{j=1,\dots,n} c_\lambda \varphi_j(\lambda)(\epsilon'_j, l_\lambda(e_j))(l_\lambda(e'_j), \epsilon_j) = 1.$$

On a

$$X_\lambda(e,g) = c_\lambda \sum_{\epsilon \in \mathcal{B}^{K_N}_\rho} (\epsilon, l_\lambda(\pi_\lambda(g)\pi_\lambda(f)e))(l_\lambda(\pi_\lambda(g)e), \epsilon).$$

L'élément $l_\lambda(\pi_\lambda(g)\pi_\lambda(f)e)$ est invariant par K_N pour tout $g \in \Gamma_N K$ et tout $e \in \mathcal{K}^G_{Q,\tau}$. Supposons $g \in \Gamma_N K$. Alors

$$l_\lambda(\pi_\lambda(g)\pi_\lambda(f)e) = \sum_{\epsilon \in \mathcal{B}^{K_N}_\rho} (\epsilon, l_\lambda(\pi_\lambda(g)\pi_\lambda(f)e))\epsilon,$$

et

$$X_\lambda(e,g) = c_\lambda(l_\lambda(\pi_\lambda(g)e), l_\lambda(\pi_\lambda(g)\pi_\lambda(f)e)).$$

On peut multiplier $X_\lambda(e,g)$ par le membre de gauche de (5) et on obtient

$$(6) \qquad X_\lambda(e,g) = \sum_{j=1,\dots,n} \varphi_j(\lambda) X_{\lambda,j}(e,g),$$

où, pour tout $g \in M(F)K$, on a posé

$$X_{\lambda,j}(e,g) = c_\lambda^2(l_\lambda(\pi_\lambda(g)e), l_\lambda(\pi_\lambda(g)\pi_\lambda(f)e))(\epsilon'_j, l_\lambda(e_j))(l_\lambda(e'_j), \epsilon_j).$$

Fixons j. Le produit de l'un des facteurs c_λ et des deux premiers produits scalaires est égal à

$$\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\rho}(\epsilon'_j \otimes \pi_\lambda(g)e, l_\lambda(\pi_\lambda(g)\pi_\lambda(f)e) \otimes e_j).$$

En choisissant un entier c_0 assez grand, on peut ici remplacer $\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\rho}$ par $\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\rho,c}$ pour tout $c \geq c_0$. Remarquons que c_0 est indépendant de de λ : cela résulte de la preuve du lemme 3.5. Il est aussi indépendant de N qui n'intervient pas ici. On a donc

$$X_{\lambda,j}(e,g) = \int_{H(F)U(F)_c} (\rho(h)\epsilon'_j, l_\lambda(\pi_\lambda(g)\pi_\lambda(f)e))(\pi_\lambda(g)e, \pi_\lambda(hu)e_j)c_\lambda(l_\lambda(e'_j), \epsilon_j)\bar{\xi}(u)du\,dh$$

pourvu que $c \geq c_0$. Dans l'intégrale, le produit de c_λ et des produits scalaires extrêmes est égal à $\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\rho}(\rho(h)\epsilon'_j \otimes e'_j, \epsilon_j \otimes \pi_\lambda(g)\pi_\lambda(f)e)$. On peut encore remplacer $\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\rho}$ par $\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\rho,c}$ pourvu que $c \geq c_0$. On obtient

$$(7) \qquad X_{\lambda,j}(e,g) = \int_{H(F)U(F)_c} \int_{H(F)U(F)_c} (\pi_\lambda(g)e, \pi_\lambda(hu)e_j)(\rho(h'h)\epsilon'_j, \epsilon_j)$$
$$(e'_j, \pi_\lambda(h'u'g)\pi_\lambda(f)e)\bar{\xi}(u')\bar{\xi}(u)du'\,dh'\,du\,dh.$$

On a

(8) pour g fixé, cette expression est absolument convergente, uniformément en λ.

En effet, elle est majorée en valeur absolue par

$$\int_{H(F)U(F)_c} \int_{H(F)U(F)_c} \Xi^G(hu)\Xi^H(h'h)\Xi^G(h'u')du'\,dh'\,du\,dh$$

qui est convergente d'après 4.3(5).

On peut maintenant lever l'hypothèse que λ est en position générale. Grâce à (8), la formule (7) définit une fonction C^∞ de λ et l'égalité (6) se prolonge par continuité à tout λ. Pour deux entiers $c, c' \in \mathbb{N}$, et pour $g \in M(F)K$, posons

$$X_{\lambda,j,c,c'}(e,g) = \int_{H(F)U(F)_c} \int_{H(F)U(F)_{c'}} (\rho(h)\epsilon'_j, \epsilon_j)(\pi_\lambda(h'u'g)e, \pi_\lambda(hu)e_i)$$

$$(e'_j, \pi_\lambda(h'u'g)\pi_\lambda(f)e)\bar{\xi}(u)du'\,dh'\,du\,dh.$$

Comme (7), cette expression est absolument convergente. On a

(9) il existe c_0 indépendant de N et λ tel que, si $c \geq c_0$ et $c' \geq c_0$, alors $X_{\lambda,j}(e,g) = X_{\lambda,j,c,c'}(e,g)$ pour tout $g \in M(F)K$.

Pour a appartenant à un sous-groupe ouvert compact assez petit de $A(F)$, le changement de variables $u \mapsto aua^{-1}$, $u' \mapsto au'a^{-1}$ dans la définition ci-dessus de $X_{\lambda,i,c,c'}(e,g)$ revient à y remplacer $\bar{\xi}(u)$ par $\bar{\xi}(aua^{-1})$. Comme dans la preuve de (1), on en déduit que, si c_0 est assez grand, $X_{\lambda,j,c,c'}(e,g)$ ne dépend pas de c, pourvu que $c \geq c_0$. Pour $c, c' \geq c_0$, on a donc $X_{\lambda,j,c,c'}(e,g) = X_{\lambda,j,c',c'}$. On peut remplacer c par c' dans la formule (7). Dans cette formule, effectuons le changement de variables $h \mapsto h'^{-1}h$, $u \mapsto h^{-1}h'u'^{-1}h'^{-1}hu$. Alors le membre de droite de (7) devient $X_{\lambda,j,c',c'}$. Cela prouve (9).

En rassemblant l'égalité (2), la définition de $X_\lambda(e,g)$, l'égalité (6) et la propriété (9), on obtient le résultat suivant. Rappelons que l'on a supposé $m(\mathcal{O},\rho) = 1$. Il existe c_0 tel que, pour tout N, tout $g \in \Gamma_N K$, tous c, c' tels que $c \geq c_0$, $c' \geq c_0$, on a l'égalité

$$(10) \qquad \sum_{\epsilon \in \mathcal{B}_\rho^{K_N}} I_{L,\mathcal{O}}(\epsilon, f, g) = [i\mathcal{A}_{\mathcal{O}}^\vee : i\mathcal{A}_{L,F}^\vee]^{-1} \sum_{e \in \mathcal{B}_{\mathcal{O}}^{K_f}} \sum_{j=1,\ldots,n}$$

$$\int_{i\mathcal{A}_{L,F}^*} m(\tau_\lambda)\varphi_j(\lambda)X_{\lambda,j,c,c'}(e,g)\,d\lambda.$$

On note $I_{L,\mathcal{O},N}(\theta_\rho, f, g)$ le membre de droite de cette égalité, qui est défini pour tout $g \in M(F)K$.

6.4 Une première approximation

D'après 6.2(3), 6.3(4) et 6.3(10), on a l'égalité

$$I(\theta_\rho, f, g) = \sum_{L \in \mathcal{L}(M_{min})} |W^L||W^G|^{-1} \sum_{\mathcal{O} \in \Pi_2(L)_f, m(\mathcal{O},\rho)=1} I_{L,\mathcal{O},N}(\theta_\rho, f, g),$$

pour tout $g \in \Gamma_N K$. Comme fonctions de g, les deux membres sont définis sur $M(F)K$ et sont invariants à gauche par $H(F)$. Ils sont donc égaux pour $g \in H(F)\Gamma_N K$. L'intersection de $M(F)K$ avec le support de κ_N étant contenu dans cet ensemble, si l'on multiplie les deux membres de l'égalité par $\kappa_N(g)$, l'égalité obtenue devient vraie pour tout $g \in M(F)K$. Par définition, $I_N(\theta_\rho, f)$ est l'intégrale de $I(\theta_\rho, f, g)\kappa_N(g)$ sur $g \in H(F)U(F)\backslash G(F)$ ou, ce qui revient au même, l'intégrale de $I(\theta_\rho, f, mk)\kappa_N(mk)\delta_P(m)^{-1}$ sur $m \in H(F)\backslash M(F)$ et $k \in K$. Donc

$$(1) \qquad I_N(\theta_\rho, f) = \int_{H(F)\backslash M(F)} \int_K \sum_{L \in \mathcal{L}(M_{min})} |W^L||W^G|^{-1}$$

$$\sum_{\mathcal{O}\in\Pi_2(L)_f, m(\mathcal{O},\rho)=1} I_{L,\mathcal{O},N}(f,mk)\kappa_N(mk)\delta_P(m)^{-1}dk\,dm.$$

Soient $L\in\mathcal{L}(M_{min})$ et $\mathcal{O}\in\Pi_2(L)_f$ tel que $m(\mathcal{O},\rho)=1$. On reprend les notations du paragraphe précédent. On fixe c_0 vérifiant 6.3(9) et $c\geq c_0$. Pour tout entier $C\in\mathbb{N}$, posons

$$I_{L,\mathcal{O},N,C}(\theta_\rho,f)=[i\mathcal{A}_{\mathcal{O}}^\vee:i\mathcal{A}_{L,F}^\vee]^{-1}\sum_{e\in\mathcal{B}_{\mathcal{O}}^{K_f}}\sum_{j=1,\dots,n}\int_{i\mathcal{A}_{L,F}^*}m(\tau_\lambda)\varphi_j(\lambda)$$

$$\int_{H(F)U(F)_c}\mathbf{1}_{\sigma<Clog(N)}(hu)(\rho(h)\epsilon_j',\epsilon_j)\bar{\xi}(u)\int_{G(F)}(\pi_\lambda(g)e,\pi_\lambda(hu)e_j)$$

$$(e_j',\pi_\lambda(g)\pi_\lambda(f)e)\kappa_N(g)dg\,du\,dh\,d\lambda.$$

Lemme. *(i) Cette expression est absolument convergente.*

(ii) Il existe C tel que l'on ait la majoration

$$|I_N(\theta_\rho,f)-\sum_{L\in\mathcal{L}(M_{min})}|W^L||W^G|^{-1}\sum_{\mathcal{O}\in\Pi_2(L)_f,m(\mathcal{O},\rho)=1}I_{L,\mathcal{O},N,C}(\theta_\rho,f)|<<N^{-1}$$

pour tout entier $N\geq 2$.

Preuve. Soient L et $\mathcal{O}$ comme avant l'énoncé. Notons $I_{L,\mathcal{O},N,\infty}(\theta_\rho,f)$ l'expression obtenue en supprimant la fonction $\mathbf{1}_{\sigma<Clog(N)}$ dans la définition de $I_{L,\mathcal{O},N,C}(\theta_\rho,f)$. Pour $m\in M(F)$, $k\in K$, $u,u'\in U(F)$, $h\in H(F)$, $\lambda\in i\mathcal{A}_{L,F}^*$, posons

$$\Phi(m,k,u,u',h,\lambda)=[i\mathcal{A}_{\mathcal{O}}^\vee:i\mathcal{A}_{L,F}^\vee]^{-1}\sum_{e\in\mathcal{B}_{\mathcal{O}}^{K_f}}\sum_{j=1,\dots,n}m(\tau_\lambda)\varphi_j(\lambda)(\rho(h)\epsilon_j',\epsilon_j)\bar{\xi}(u)$$

$$(\pi_\lambda(u'mk)e,\pi_\lambda(hu)e_i)(e_j',\pi_\lambda(u'mk)\pi_\lambda(f)e)\kappa_N(mk)\delta_P(m)^{-1}.$$

L'expression $I_{L,\mathcal{O},N,\infty}(\theta_\rho,f)$ contient une intégrale sur $G(F)$. On y décompose la variable $g\in G(F)$ en $g=u'mk$, avec $u'\in U(F)$, $m\in M(F)$, $k\in K$. On obtient formellement l'égalité

$$I_{L,\mathcal{O},N,\infty}(\theta_\rho,f)=\int_{i\mathcal{A}_{L,F}^*}\int_{M(F)}\int_K\int_{H(F)U(F)_c}\int_{U(F)}\Phi(m,k,u,u',h,\lambda)du'\,du\,dh\,dk\,dm\,d\lambda.$$

Cette égalité est justifiée par

(2) cette expression est absolument convergente.

Les intégrales sur les ensembles compacts K et $i\mathcal{A}_{L,F}^*$ sont insignifiantes. On a

(3) $\qquad |\Phi(m,k,u,u',h,\lambda)|<<\Xi^H(h)\Xi^G(u^{-1}h^{-1}u'm)\Xi^G(u'm)\kappa_N(m)\delta_P(m)^{-1}.$

L'intégrale de cette fonction en m, u, u', h est convergente d'après 4.3(6). Cela démontre (2).

En appliquant la même procédure, on obtient

$$I_{L,\mathcal{O},N,C}(\theta_\rho,f)=\int_{i\mathcal{A}_{L,F}^*}\int_{M(F)}\int_K\int_{H(F)U(F)_c}\int_{U(F)}\mathbf{1}_{\sigma<Clog(N)}(hu)$$

$$\Phi(m,k,u,u',h,\lambda)du'\,du\,dh\,dk\,dm\,d\lambda,$$

$$\int_{H(F)\backslash M(F)}\int_K I_{L,\mathcal{O},N}(f,mk)\kappa_N(mk)\delta_P(m)^{-1}dk\,dm = \int_{i\mathcal{A}^*_{L,F}}\int_{M(F)}\int_K$$

$$\int_{H(F)U(F)_c}\int_{U(F)_{c'}}\Phi(m,k,u,u',h,\lambda)du'\,du\,dh\,dk\,dm\,d\lambda,$$

pourvu que $c' \geq c_0$. Ces expressions sont absolument convergentes d'après ce que l'on vient de prouver. La convergence de la première est l'assertion (i) de l'énoncé. Pour prouver l'assertion (ii), il suffit d'après (1) de montrer que l'on peut choisir C tel que la différence entre les deux expressions ci-dessus soit essentiellement majorée par N^{-1}. D'après (3), cette différence est essentiellement majorée par la somme de l'intégrale

$$\int_{M(F)}\int_{H(F)U(F)_c}\int_{U(F)-U(F)_{c'}}\mathbf{1}_{\sigma<Clog(N)}(hu)\Xi^H(h)\Xi^G(u^{-1}h^{-1}u'm)$$

$$\Xi^G(u'm)\kappa_N(m)\delta_P(m)^{-1}du'\,du\,dh\,dm,$$

où $U(F)-U(F)_{c'}$ est le complémentaire de $U(F)_{c'}$ dans $U(F)$, et de l'intégrale

$$\int_{M(F)}\int_{H(F)U(F)_c}\int_{U(F)_{c'}}(1-\mathbf{1}_{\sigma<Clog(N)}(hu))\Xi^H(h)\Xi^G(u^{-1}h^{-1}u'm)$$

$$\Xi^G(u'm)\kappa_N(m)\delta_P(m)^{-1}du'\,du\,dh\,dm.$$

Dans la première, on peut oublier le terme $\mathbf{1}_{\sigma<Clog(N)}(hu)$. La relation 4.3(7) nous dit qu'il existe c_1 tel que, si l'on prend $c' = c_1 log(N) + c_0$, l'intégrale est essentiellement bornée par N^{-1}. L'entier c' étant ainsi choisi, la relation 4.3(8) nous dit qu'il existe c_2 tel que la seconde intégrale soit essentiellement majorée par N^{-1} pourvu que $Clog(N) \geq c_2(log(N)+c')$. On peut choisir C tel qu'il en soit ainsi pour tout $N \geq 2$. Cela achève la preuve. $\square$

On fixe désormais C vérifiant l'assertion (ii) du lemme précédent. Dans les paragraphes suivants et jusqu'en 6.9, on fixe $L \in \mathcal{L}(M_{min})$ et $\mathcal{O} \in \Pi_2(L)_f$ tel que $m(\mathcal{O},\rho) = 1$.

6.5 Rappels sur les termes constants faibles des coefficients des représentations tempérés

Fixons un élément $P_{min} = M_{min}U_{min} \in \mathcal{P}(M_{min})$. On note Δ l'ensemble de racines simples associé. On note $M_{min}(F)^+$ le sous-ensemble des $m \in M_{min}(F)$ tels que $H_{M_{min}}(m) \in \mathcal{A}^+_{P_{min}}$.Soit $Q_1 = L_1U_1 \in \mathcal{F}(M_{min})$ tel que $P_{min} \subset Q_1$. On note Δ^{L_1} le sous-ensemble de Δ associé au sous-groupe parabolique minimal $P_{min} \cap L_1$ de L_1. Posons

$$W(L_1|G|L) = \{s \in W^G; sLs^{-1} \subset L_1, P_{min} \cap L_1 \subset sQs^{-1}\}.$$

C'est un ensemble de représentants du quotient

$$W^{L_1}\backslash\{s \in W^G; sLs^{-1} \subset L_1\}.$$

On identifie cet ensemble à un ensemble de représentants dans K. Pour $s \in W(L_1|G|L)$, notons $\gamma(s) : \mathcal{K}^G_{Q,\tau} \to \mathcal{K}^G_{sQs^{-1},\tau}$ l'opérateur défini par $(\gamma(s)e)(k) = e(s^{-1}k)$. Posons $Q_{1,s} =$

$(L_1\cap sQs^{-1})U_1$, $\tilde{Q}_{1,s}=(L_1\cap sQs^{-1})\bar{U}_1$, où $\bar{U}_1$ est le radical unipotent de $\bar{Q}_1$. Pour $\lambda\in i\mathcal{A}^*_{L,F}$, on définit les opérateurs :

$$J_{Q_{1,s}|sQs^{-1}}((s\tau)_{s\lambda})\circ\gamma(s):\mathcal{K}^G_{Q,\tau}\to\mathcal{K}^G_{Q_{1,s},s\tau}$$

et

$$J_{\tilde{Q}_{1,s}|sQs^{-1}}((s\tau)_{s\lambda}\circ\gamma(s):\mathcal{K}^G_{Q,\tau}\to\mathcal{K}^G_{\tilde{Q}_{1,s},s\tau}.$$

Posons $K_1=K\cap L_1(F)$. La restriction de K à K_1 définit des homomorphismes

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{K}^G_{Q_{1,s},s\tau} & & \\ & \searrow & \\ & & \mathcal{K}^{L_1}_{L_1\cap sQs^{-1},s\tau} \\ & \nearrow & \\ \mathcal{K}^G_{\tilde{Q}_{1,s},s\tau} & & \end{array}$$

Pour $e'\in\mathcal{K}^G_{Q_{1,s},s\tau}$ et $e\in\mathcal{K}^G_{\tilde{Q}_{1,s},s\tau}$, on pose

$$(e',e)^{L_1}=\int_{K_1}(e'(k_1),e(k_1))dk_1,$$

la mesure étant de masse totale 1. Pour $e,e'\in\mathcal{K}^G_{Q,\tau}$, posons

$$(e',e)_{Q_1,\lambda}=\sum_{s\in W(L_1|G|L)}(J_{Q_{1,s}|sQs^{-1}}((s\tau)_{s\lambda})\circ\gamma(s)e',J_{\tilde{Q}_{1,s}|sQs^{-1}}((s\tau)_{s\lambda})\circ\gamma(s)e)^{L_1}.$$

Lemme. *Soient $e,e'\in\mathcal{K}^G_{Q,\tau}$. Il existe $c>0$, $R\geq 0$ et $\epsilon>0$ tels que*

$$\delta_{Q_1}(m)^{1/2}|(e',\pi_\lambda(m)e)-(e',\pi_\lambda(m)e)_{Q_1,\lambda}|<<$$

$$\Xi^{L_1}(m)\sigma(m)^R sup\{exp(-\epsilon\alpha(H_{M_1}(m)));\alpha\in\Delta-\Delta^{L_1}\}$$

pour tout $\lambda\in i\mathcal{A}^*_{L,F}$ et tout $m\in M_{min}(F)^+$ vérifiant les conditions $\alpha(H_{M_{min}}(m))>c$ pour tout $\alpha\in\Delta-\Delta^{L_1}$.

Preuve. D'après un résultat de Casselman, on peut trouver c tel que, pour λ et m comme dans l'énoncé, $\delta_{Q_1}(m)^{1/2}(e',\pi_\lambda(m)e)$ soit égal au "terme constant" de $(e',\pi_\lambda(m)e)$ au sens d'Harish-Chandra (cf. [W2] corollaire I.4.4 ; l'uniformité en λ est expliquée en [W2] I.5). L'expression $\delta_{Q_1}(m)^{1/2}(e',\pi_\lambda(m)e)_{Q_1,\lambda}$ est le "terme constant faible" de $(e',\pi_\lambda(m)e)$, cf. [W2] proposition V.1.1). On doit donc prouver que la différence entre le terme constant et le terme constant faible vérifie la majoration indiquée. Cette différence est exactement une fonction notée $m\mapsto(E^G_Q\psi_\omega)^+_{\bar{Q}_1}(m)$ dans le lemme VI.2.3 de [W2]. Ce lemme donne une majoration de cette fonction qui n'est pas tout-à-fait celle dont nous avons besoin. Il suffit de modifier sa démonstration. Notons simplement $m\mapsto E_\lambda(m)$ notre fonction. D'après [W2] VI.2(2), on peut trouver des réels $c>0$ et $R\geq 0$ et un élément $a\in A_{L_1}(F)\cap M_{min}(F)^+$ de sorte que l'on ait la majoration

$$|E_\lambda(a^n m)|<<2^{-n}\Xi^{L_1}(m)\sigma(m)^R$$

pour λ et m comme dans l'énoncé et $n\in\mathbb{N}$. Cela étant, pour m comme dans l'énoncé, prenons pour n la partie entière du plus petit des nombres

$$\frac{\alpha(H_{M_{min}}(m))-c}{\alpha(H_{M_{min}}(a))+1}$$

pour $\alpha\in\Delta-\Delta^{L_1}$. Posons $m'=a^{-n}m$. Cet élément vérifie encore les conditions de l'énoncé. En appliquant la majoration ci-dessus à n et m', on obtient

$$(1)\qquad |E_\lambda(m)|<<2^{-n}\Xi^{L_1}(m')\sigma(m')^R.$$

Parce que $a\in A_{L_1}(F)$, $\Xi^{L_1}(m')=\Xi^{L_1}(m)$. On a

$$\sigma(m')<<\sigma(m)+\sigma(a^{-n})<<\sigma(m)+n\sigma(a),$$

d'où

$$2^{-n/2}\sigma(m')^R<<\sigma(m)^R.$$

D'autre part il existe $\epsilon>0$ tel que

$$2^{-n/2}<<sup\{exp(-\epsilon\alpha(H_{M_1}(m)));\alpha\in\Delta-\Delta^{L_1}\}.$$

Alors (1) entraîne la majoration cherchée. $\square$

6.6 Changement de fonction de troncature

Soit $Y\in\mathcal{A}^+_{P_{min}}$. Comme en [A3] paragraphe 3, on en déduit une famille $\mathcal{Y}=(Y_{P'})_{P'\in\mathcal{P}(M_{min})}$ de points de $\mathcal{A}_{M_{min}}$, qui est (G,M_{min})-orthogonale et positive. On note $\zeta\mapsto\sigma^G_{M_{min}}(\zeta,\mathcal{Y})$ la fonction caractéristique de son enveloppe convexe. On note $g\mapsto u(g,Y)$ la fonction caractéristique de l'ensemble des $g\in G(F)$ qui s'écrivent $g=kmk'$, où $k,k'\in K$, $m\in M_{min}(F)$, avec $\sigma^G_{M_{min}}(H_{M_{min}},\mathcal{Y})=1$. Fixons $e',e''\in\mathcal{K}^G_{Q,\tau}$ et une fonction φ sur $i\mathcal{A}^*_{L,F}$, que l'on suppose C^∞. Pour $e\in\mathcal{K}^G_{Q,\tau}$, $g,g'\in G(F)$ et $\lambda\in i\mathcal{A}^*_{L,F}$, posons

$$\Phi(e,g,g',\lambda)=(\pi_\lambda(g)e,\pi_\lambda(g')e')(e'',\pi_\lambda(g)\pi_\lambda(f)e).$$

Posons

$$\Phi_N(g')=[i\mathcal{A}^\vee_{\mathcal{O}}:i\mathcal{A}^\vee_{L,F}]^{-1}\sum_{e\in\mathcal{B}^{K_f}_{\mathcal{O}}}\int_{i\mathcal{A}^*_{L,F}}m(\tau_\lambda)\varphi(\lambda)\int_{G(F)}\Phi(e,g,g',\lambda)\kappa_N(g)dg\,d\lambda,$$

$$\Phi_Y(g')=[i\mathcal{A}^\vee_{\mathcal{O}}:i\mathcal{A}^\vee_{L,F}]^{-1}\sum_{e\in\mathcal{B}^{K_f}_{\mathcal{O}}}\int_{i\mathcal{A}^*_{L,F}}m(\tau_\lambda)\varphi(\lambda)\int_{G(F)}\Phi(e,g,g',\lambda)u(g,Y)dg\,d\lambda.$$

Ces expressions sont absolument convergentes. Pour la seconde, c'est évident : les intégrales sont à support compact. Pour la première, pour e et g' fixés, on a une majoration

$$|\Phi(e,g,g',\lambda)|<<\Xi^G(g)^2$$

pour tous λ, g. Or l'intégrale

$$(1)\qquad \int_{G(F)}\kappa_N(g)\Xi^G(g)^2dg$$

est convergente d'après 4.3(2).

Proposition. *Soit R un réel. Il existe des réels $c_1, c_2 > 0$ tels que l'on ait la majoration*

$$|\Phi_N(g') - \Phi_Y(g')| << N^{-R}$$

pour tout $N \geq 2$, tout $g' \in G(F)$ tel que $\sigma(g') \leq Clog(N)$ et tout $Y \in \mathcal{A}_{P_{min}}^+$ vérifiant les inégalités $c_1 log(N) \leq \alpha(Y) \leq c_2 N$ pour tout $\alpha \in \Delta_{min}$.

Preuve. Commençons par préciser le calcul de convergence que l'on a fait avant l'énoncé. On a

(2) il existe $R_1 \geq 0$ tel que

$$|\Phi_N(g')| << N^{R_1}$$

pour tout $N \geq 2$ et tout $g' \in G(F)$ tel que $\sigma(g') \leq Clog(N)$.

En effet, pour $e \in \mathcal{K}_{Q,\tau}^G$ on a plus précisément la majoration

$$|\Phi(e, g, g', \lambda)| << \Xi^G(g'^{-1}g)\Xi^G(g)$$

pour tous λ, g, g'. Grâce à 3.3(5), il existe $R_2 > 0$ tel que

$$\Xi^G(g'^{-1}g) << exp(R_2\sigma(g'))\Xi^G(g).$$

Pour g' tel que $\sigma(g') \leq Clog(N)$,on obtient

$$|\Phi(e, g, g', \lambda)| << N^{CR_2}\Xi^G(g)^2.$$

D'après 4.3(2), il existe $R_3 > 0$ tel que l'intégrale (1) soit essentiellement majorée par N^{R_3}. On en déduit (2) avec $R_1 = CR_2 + R_3$.

Définissons une fonction D sur $M_{min}(F)^+$ par

$$D(m) = mes(KmK)mes(K \cap M_{min}(F))^{-1}.$$

D'après [W2], on a une majoration $D(m) << \delta_{P_{min}}(m)$. Pour toute fonction $f' \in C_c^\infty(G(F))$, on a l'égalité

$$\int_{G(F)} f'(g)dg = \int_K \int_K \int_{M_{min}(F)^+} D(m)f'(k_1mk_2)dm\, dk_1\, dk_2,$$

cf. [A3] (1.3). Pour tout $Q_1 = L_1U_1 \in \mathcal{F}(M_{min})$, la famille $\mathcal{Y}$ permet de définir des fonctions $\zeta \mapsto \sigma_{M_{min}}^{Q_1}(\zeta, \mathcal{Y})$ et $\zeta \mapsto \tau_{Q_1}(\zeta - Y_{Q_1})$ sur $\mathcal{A}_{M_{min}}$ (cf.[A3]; on a repris les définitions en [W1] 10.3). On vérifie que l'égalité

$$\sigma_{M_{min}}^{Q_1}(\zeta, \mathcal{Y})\tau_{Q_1}(\zeta - Y_{Q_1}) = 1$$

entraine

(3) $\beta(\zeta) > inf\{\alpha(Y); \alpha \in \Delta\} \geq 0$ pour toute racine β de $A_{M_{min}}$ dans $\mathfrak{u}_1$.

On a l'égalité

$$\sum_{Q_1 \in \mathcal{F}(M_{min})} \sigma_{M_{min}}^{Q_1}(\zeta, \mathcal{Y})\tau_{Q_1}(\zeta - Y_{Q_1}) = 1$$

pour tout ζ. L'inégalité précédente entraîne que, pour $\zeta \in \mathcal{A}^+_{P_{min}}$, seuls interviennent de façon non nulle les Q_1 contenant P_{min}. C'est-à-dire que, pour $\zeta \in \mathcal{A}^+_{P_{min}}$, on a l'égalité

$$\sum_{Q_1 \in \mathcal{F}(M_{min}), P_{min} \subset Q_1} \sigma^{Q_1}_{M_{min}}(\zeta, \mathcal{Y})\tau_{Q_1}(\zeta - Y_{Q_1}) = 1.$$

Pour toute fonction $f' \in C^\infty_c(G(F))$, on a donc l'égalité

$$(4) \qquad \int_{G(F)} f'(g)dg = \sum_{Q_1 \in \mathcal{F}(M_{min}), P_{min} \subset Q_1} \int_K \int_K \int_{M_{min}(F)^+}$$

$$f'(k_1 m k_2) D(m) \sigma^{Q_1}_{M_{min}}(H_{M_{min}}(m), \mathcal{Y})\tau_{Q_1}(H_{M_{min}}(m) - Y_{Q_1}) dm\, dk_1\, dk_2.$$

Pour $Q_1 \in \mathcal{F}(M_{min})$ tel que $P_{min} \subset Q_1$, posons

$$\Phi_{N,Y,Q_1}(g') = [i\mathcal{A}^\vee_{\mathcal{O}} : i\mathcal{A}^\vee_{L,F}]^{-1} \sum_{e \in \mathcal{B}^{K_f}_{\mathcal{O}}} \int_{i\mathcal{A}^*_{L,F}} m(\tau_\lambda)\varphi(\lambda) \int_K \int_K \int_{M_{min}(F)^+}$$

$$\Phi(e, k_1 m k_2, g', \lambda)\kappa_N(k_1 m k_2)$$

$$D(m)\sigma^{Q_1}_{M_{min}}(H_{M_{min}}(m), \mathcal{Y})\tau_{Q_1}(H_{M_{min}}(m) - Y_{Q_1}) dm\, dk_1\, dk_2\, d\lambda.$$

En l'appliquant (4), on a l'égalité

$$\Phi_N(g') = \sum_{Q_1 \in \mathcal{F}(M_{min}), P_{min} \subset Q_1} \Phi_{N,Y,Q_1}(g').$$

Considérons d'abord le sous-groupe parabolique $Q_1 = G$. Dans ce cas, pour $g = k_1 m k_2$, avec $k_1, k_2 \in K$ et $m \in M_{min}(F)^+$, on a $\sigma^G_{M_{min}}(H_{M_{min}}(m), \mathcal{Y})\tau_G(H_{M_{min}}(m) - Y_G) = 1$ si et seulement si $u(g, Y) = 1$. On a donc

$$\Phi_{N,Y,G}(g') = [i\mathcal{A}^\vee_{\mathcal{O}} : i\mathcal{A}^\vee_{L,F}]^{-1} \sum_{e \in \mathcal{B}^{K_f}_{\mathcal{O}}} \int_{i\mathcal{A}^*_{L,F}} m(\tau_\lambda)\varphi(\lambda)$$

$$\int_{G(F)} \Phi(e, g, g', \lambda)\kappa_N(g) u(g, Y) dg\, d\lambda.$$

Montrons que

(5) il existe $c_2 > 0$ tel que, si $\alpha(Y) \leq c_2 N$ pour tout $\alpha \in \Delta_{min}$, on a l'égalité $u(g, Y)\kappa_N(g) = u(g, Y)$ pour tout $g \in G(F)$.

Ecrivons $g = muk$, avec $m \in M(F)$, $u \in U(F)$ et $k \in K$. On a $\kappa_N(g) = \kappa_N(m)$ et une majoration $\sigma(m) << \sigma(g)$. Par définition de la fonction κ_N, il existe c_3 tel que la majoration $\sigma(m) \leq c_3 N$ entraîne $\kappa_N(m) = 1$. On a d'autre part une majoration $\sigma(g) << sup\{\alpha(Y); \alpha \in \Delta\}$ pour tout $g \in G(F)$ tel que $u(g, Y) = 1$. La combinaison de ces propriétés entraîne (5).

On déduit de (5) que, si Y vérifie les conditions de cette assertion, on a l'égalité $\Phi_{N,Y,G}(g') = \Phi_Y(g')$ pour tout g'. Pour démontrer la proposition, il suffit donc de trouver c_1 tel que, si Y vérifie les minorations de l'énoncé, on a la majoration

$$(6) \qquad |\Phi_{N,Y,Q_1}(g')| << N^{-R}$$

pour g' comme dans l'énoncé et tout $Q_1 \neq G$.

On fixe désormais $Q_1 = L_1U_1 \in \mathcal{F}(M_{min})$ tel que $P_{min} \subset Q_1$ et $Q_1 \neq G$. Pour simplifier la rédaction, on va considérer un réel c_1 et supposer $\alpha(Y) \geq c_1 log(N)$ pour tout $\alpha \in \Delta$. On montrera que toutes les propriétés dont on a besoin sont vérifiées si c_1 est assez grand. Soient $g' \in G(F)$ tel que $\sigma(g') \leq Clog(N)$, $k_1, k_2 \in K$ et $m \in M_{min}(F)^+$. On pose $\zeta = H_{M_{min}}(m)$ et on suppose $\sigma_{M_{min}}^{Q_1}(\zeta, \mathcal{Y})\tau_{Q_1}(\zeta - Y_{Q_1}) = 1$. Ecrivons $g'^{-1}k_1 = k'^{-1}l'u'$, avec $u' \in U_1(F)$, $l' \in L_1(F)$, $k' \in K$. On a

(7) si c_1 est assez grand, $k_2^{-1}m^{-1}u'mk_2$ appartient à K_f.

Posons $u' = exp(X')$, avec $X' \in \mathfrak{u}_1(F)$ et fixons une norme $|.|$ sur $\mathfrak{g}(F)$. On a $log(|X'|) << \sigma(u') << \sigma(g') \leq Clog(N)$. Il existe donc $c_4, c_5 > 0$ tels que

$$log(|m^{-1}X'm|) \leq c_4 log(N) - c_5 inf\{\beta(\zeta); \beta \text{ racine de } A_{M_{min}} \text{ dans } \mathfrak{u}_1\}.$$

Grâce à (3), $m^{-1}X'm$ est aussi petit que l'on veut pourvu que c_1 soit assez grand. On peut en particulier imposer que $m^{-1}u'm = exp(m^{-1}X'm)$ appartienne à K_f. Puisque K_f est distingué dans K, (7) en résulte.

Notons $M_{min}(F)^{L_1,+}$ l'ensemble des $m' \in M_{min}(F)$ tels que $\alpha(H_{M_{min}}(m')) \geq 0$ pour tout $\alpha \in \Delta^{L_1}$. Posons $K_1 = K \cap L_1(F)$. L'élément $l'm$ de $L_1(F)$ s'écrit $l'm = k_3m'k_4$, avec $k_3, k_4 \in K_1$ et $m' \in M_{min}(F)^{L_1,+}$. Posons $\zeta' = H_{M_{min}}(m')$. On a

(8) pour tout $c > 0$, m' appartient à $M_{min}(F)^+$ et vérifie $\alpha(\zeta') > clog(N)$ pour tout $\alpha \in \Delta - \Delta^{L_1}$, pourvu que c_1 soit assez grand.

Soit α. Notons $\mathfrak{u}_\alpha$ le sous-espace radiciel de $\mathfrak{u}_{min}$ associé à α. Il existe $c_6, c_7 > 0$ tels que, pour tout élément non nul $X \in \mathfrak{u}_\alpha(F)$ et tout $x \in M_{min}(F)$, on ait les inégalités

$$(9) \qquad \alpha(H_{M_{min}}(x)) - c_6 \leq log(\frac{|xXx^{-1}|}{|X|}) \leq \alpha(H_{M_{min}}(x)) + c_7.$$

Supposons $\alpha \in \Delta - \Delta^{L_1}$, soit X un élément non nul de $\mathfrak{u}_\alpha(F)$. On a $m'Xm'^{-1} = k_3^{-1}l'mk_4^{-1}Xk_4m^{-1}l'^{-1}k_3$. Puisque k_4 appartient à $L_1(F)$, $k_4^{-1}Xk_4$ appartient à $\mathfrak{u}_1(F)$. En utilisant (9) pour m, on voit qu'il existe des constantes $c_8, c_9, c_{10} > 0$ telles que l'on ait l'inégalité

$$log(|m'Xm'^{-1}|) \geq log(|X|) - c_8\sigma(l') + c_9 inf\{\beta(\zeta); \beta \text{ racine de } A_{M_{min}} \text{ dans } \mathfrak{u}_1\} - c_{10}.$$

On a $\sigma(l') << \sigma(g') \leq Clog(N)$. Grâce à (3), on a donc

$$log(|m'Xm'^{-1}|) > log(|X|) + clog(N) + c_7$$

pourvu que c_1 soit assez grand. Alors (9) entraîne la minoration cherchée de $\alpha(\zeta')$. En particulier $\alpha(\zeta') > 0$. Puisque l'on a aussi $\alpha(\zeta') \geq 0$ pour $\alpha \in \Delta^{L_1}$ par définition de m', on a bien $m' \in M_{min}(F)^+$. Cela prouve (8).

Pour tout λ et tout $e \in \mathcal{B}_{\mathcal{O}}^{K_f}$, on a l'égalité

$$\Phi(e, k_1mk_2, g', \lambda) = (\pi_\lambda(l'u'mk_2)e, \pi_\lambda(k')e')(\pi_\lambda(k_1^{-1})e'', \pi_\lambda(mk_2)\pi_\lambda(f)e).$$

Grâce à (7), on peut supprimer u' de cette expression pourvu que c_1 soit assez grand. On obtient

$$\Phi(e, k_1mk_2, g', \lambda) = (\pi_\lambda(m'k_4k_2)e, \pi_\lambda(k_3^{-1}k')e')(\pi_\lambda(k_1^{-1})e'', \pi_\lambda(mk_2)\pi_\lambda(f)e).$$

Posons

$$\Phi_w(e, k_1mk_2, g', \lambda) = (\pi_\lambda(m'k_4k_2)e, \pi_\lambda(k_3^{-1}k')e')_{Q_1,\lambda}(\pi_\lambda(k_1^{-1})e'', \pi_\lambda(mk_2)\pi_\lambda(f)e)_{Q_1,\lambda}.$$

Le lemme 6.5 affirme l'existence de réels $R_4 \geq 0$ et $\epsilon > 0$ tels que la valeur absolue de la différence

$$\Phi(e, k_1mk_2, g', \lambda) - \Phi_w(e, k_1mk_2, g', \lambda)$$

soit bornée par la somme de

$$\delta_{Q_1}(m')^{-1/2}\Xi^{L_1}(m')\sigma(m')^{R_4}sup\{exp(-\epsilon\alpha(\zeta'); \alpha \in \Delta - \Delta^{L_1}\}|(\pi_\lambda(k_1^{-1})e'', \pi_\lambda(mk_2)\pi_\lambda(f)e)|$$

et de

$$\delta_{Q_1}(m')^{-1/2}|(\pi_\lambda(m'k_4k_2)e, \pi_\lambda(k_3^{-1}k')e')_{Q_1,\lambda}|\delta_{Q_1}(m)^{-1/2}\Xi^{L_1}(m)$$
$$\sigma(m)^{R_4}sup\{exp(-\epsilon\alpha(\zeta); \alpha \in \Delta - \Delta^{L_1}\}.$$

On sait qu'il existe $R_5 \geq 0$ tel que $\delta_{Q_1}(x)^{-1/2}\Xi^{L_1}(x) << \Xi^G(x)\sigma(x)^{R_5}$ pour tout $x \in M_{min}(F)^+$. D'autre part, $\Xi^G(m') = \Xi^G(l'm)$. En utilisant (8), on voit qu'il existe $R_6 \geq 0$ tel que, pour tout $c > 0$, les expressions ci-dessus soient essentiellement majorées par

$$N^{-c}\Xi^G(l'm)\Xi^G(m)\sigma(l')^{R_6}\sigma(m)^{R_6}$$

pourvu que c_1 soit assez grand. Définissons des termes $\Phi_{N,Y,Q_1,w}(e, g', \lambda)$ et $\Phi_{N,Y,Q_1,w}(g')$ en remplaçant $\Phi(e, k_1mk_2, g', \lambda)$ par $\Phi_w(e, k_1mk_2, g', \lambda)$ dans les définitions de $\Phi_{N,Y,Q_1}(e, g', \lambda)$ et $\Phi_{N,Y,Q_1}(g')$. Si on oublie le facteur N^{-c} de la majoration ci-dessus, le même calcul qu'en (1) montre l'existence de $R_7 \geq 0$ tel que

$$|\Phi_{N,Y,Q_1}(g') - \Phi_{N,Y,Q_1,w}(g')| << N^{R_7}.$$

En réintroduisant le facteur N^{-c}, on voit que, pour tout $c > 0$, la différence ci-dessus est essentiellement majorée par N^{-c} pourvu que c_1 soit assez grand. Pour prouver (6), il suffit donc de prouver la majoration

$$|\Phi_{N,Y,Q_1,w}(g')| << N^{-R}.$$

On poursuit le calcul précédent, avec les mêmes notations. D'après la définition de 6.5, on peut décomposer $\Phi_w(e, k_1mk_2, g', \lambda)$ en

$$\sum_{s_1,s_2 \in W(L_1|G|L)} \Phi_{s_1,s_2}(e, k_1mk_2, g', \lambda)$$

où

$$\Phi_{s_1,s_2}(e, k_1mk_2, g', \lambda) =$$
$$(J_{\tilde{Q}_{1,s_1}|s_1Qs_1^{-1}}((s_1\tau)_{s_1\lambda}) \circ \gamma(s_1) \circ \pi_\lambda(m'k_4k_2)e, J_{Q_{1,s_1}|s_1Qs_1^{-1}}((s_1\tau)_{s_1\lambda}) \circ \gamma(s_1) \circ \pi_\lambda(k_3^{-1}k')e')^{L_1}$$
$$(J_{Q_{1,s_2}|s_2Qs_2^{-1}}((s_2\tau)_{s_2\lambda}) \circ \gamma(s_2) \circ \pi_\lambda(k_1^{-1})e'', J_{\tilde{Q}_{1,s_2}|s_2Qs_2^{-1}}((s_2\tau)_{s_2\lambda}) \circ \gamma(s_2) \circ \pi_\lambda(mk_2)\pi_\lambda(f)e)^{L_1}.$$

Cette définition n'a bien sûr de sens que "presque partout" en λ, les opérateurs d'entrelacement pouvant avoir des pôles. Au moins formellement, on peut décomposer de même $\Phi_{N,Y,Q_1,w}(g')$ en somme de termes $\Phi_{N,Y,Q_1,s_1,s_2}(g')$. Il y a un problème de convergence à cause des pôles des opérateurs d'entrelacement. L'assertion suivante va résoudre ce problème. Soient $s_1, s_2 \in W(L_1|G|L)$. Montrons que

(10) pour e fixé, la fonction $m(\tau_\lambda)\Phi_{s_1,s_2}(e, k_1mk_2, g', \lambda)$ est une combinaison linéaire de fonctions qui sont elles-mêmes des produits $f_1(m', \lambda)f_2(m, \lambda)f_3(k_1, k_2, k_3, k_4, k')f_4(\lambda)$, où :

$$f_1(m',\lambda)=\delta_{Q_1}(m')^{-1/2}(Ind_{L_1\cap s_1Qs_1^{-1}}^{L_1}((s_1\tau)_{s_1\lambda},m')e'_1,e_1)$$

pour des éléments e_1 et e'_1 de $\mathcal{K}^{L_1}_{L_1\cap s_1Qs_1^{-1},s_1\tau}$;

$$f_2(m,\lambda)=\delta_{Q_1}(m)^{-1/2}(e'_2,Ind_{L_1\cap s_2Qs_2^{-1}}^{L_1}((s_2\tau)_{s_2\lambda},m)e_2)$$

pour des éléments e_2 et e'_2 de $\mathcal{K}^{L_1}_{L_1\cap s_2Qs_2^{-1},s_2\tau}$;

f_3 est une fonction localement constante des variables k_1,k_2,k_3,k_4 et k' ;

f_4 est une fonction C^∞ de λ.

Fixons un sous-groupe ouvert compact K_0 de K, distingué dans K, inclus dans K_f et tel que e, e' et e'' soient invariants par K_0. Fixons des bases $\mathcal{B}$, resp. $\mathcal{B}_1$, $\tilde{\mathcal{B}}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\tilde{\mathcal{B}}_2$, des sous-espaces des éléments invariants par K_0 dans $\mathcal{K}^G_{Q,\tau}$, resp. $\mathcal{K}^G_{Q_{1,s_1},s_1\tau}$, $\mathcal{K}^G_{\tilde{Q}_{1,s_1},s_1\tau}$, $\mathcal{K}^G_{Q_{1,s_2},s_2\tau}$, $\mathcal{K}^G_{\tilde{Q}_{1,s_2},s_2\tau}$. Considérons par exemple le terme

$$J_{\tilde{Q}_{1,s_2}|s_2Qs_2^{-1}}((s_2\tau)_{s_2\lambda})\circ\gamma(s_2)\circ\pi_\lambda(mk_2)\pi_\lambda(f)e$$

qui intervient dans la définition de $\Phi_{s_1,s_2}(e,k_1mk_2,g',\lambda)$. D'après les propriétés d'entrelacement de nos opérateurs, il est égal à

$$Ind^G_{\tilde{Q}_{1,s_2}}((s_2\tau)_{s_2\lambda},m)\circ J_{\tilde{Q}_{1,s_2}|s_2Qs_2^{-1}}((s_2\tau)_{s_2\lambda})\circ\gamma(s_2)\circ\pi_\lambda(k_2)\pi_\lambda(f)e.$$

On peut remplacer $\pi_\lambda(k_2)\pi_\lambda(f)e$ par son expression dans la base $\mathcal{B}$. Les coefficients sont combinaisons linéaires de produits d'une fonction localement constante en k_2 et d'une fonction C^∞ en λ. Pour tout $b\in\mathcal{B}$, on peut ensuite remplacer $J_{\tilde{Q}_{1,s_2}|s_2Qs_2^{-1}}((s_2\tau)_{s_2\lambda})\circ\gamma(s_2)b$ par son expression dans la base $\tilde{\mathcal{B}}_2$. Les coefficients sont des fonctions de λ de la forme

$$(\tilde{b}_2,J_{\tilde{Q}_{1,s_2}|s_2Qs_2^{-1}}((s_2\tau)_{s_2\lambda})\circ\gamma(s_2)b)$$

où $b\in\mathcal{B}$, $\tilde{b}_2\in\tilde{\mathcal{B}}_2$. Notons $j_{\tilde{Q}_{1,s_2}}(\lambda)$ une telle fonction. En appliquant le même calcul aux autres termes, l'expression $m(\tau_\lambda)\Phi_{s_1,s_2}(e,k_1mk_2,g',\lambda)$ apparaît comme une combinaison linéaire de fonctions qui sont produits de fonctions des deux derniers types de l'assertion et de fonctions des types

- une fonction $(Ind^G_{\tilde{Q}_{1,s_1}}((s_1\tau)_{s_1\lambda},m')\tilde{b}_1,b_1)^{L_1}$ où $\tilde{b}_1\in\tilde{\mathcal{B}}_1$, $b_1\in\mathcal{B}_1$;
- une fonction $(b_2,(Ind^G_{\tilde{Q}_{1,s_2}}((s_2\tau)_{s_2\lambda},m)\tilde{b}_2)^{L_1}$ où $\tilde{b}_2\in\tilde{\mathcal{B}}_2$, $b_2\in\mathcal{B}_2$;
- une fonction $m(\tau_\lambda)\overline{j_{\tilde{Q}_{1,s_1}}(\lambda)j_{Q_{1,s_2}}(\lambda)}j_{\tilde{Q}_{1,s_2}}(\lambda)j_{Q_{1,s_1}}(\lambda)$;

Considérons le premier type ci-dessus. Notons e'_1, resp. e_1, la restriction de $\tilde{b}_1$, resp. b_1, à K_1. Ce sont des éléments de $\mathcal{K}^{L_1}_{L_1\cap s_1Qs_1^{-1},s_1\tau}$. En explicitant les définitions, on voit que, pour tout $x\in L_1(F)$, a fortiori pour $x\in M_{min}(F)$, on a l'égalité

$$(Ind^G_{\tilde{Q}_{1,s_1}}((s_1\tau)_{s_1\lambda},x)\tilde{b}_1,b_1)^{L_1}=\delta_{Q_1}(x)^{-1/2}(Ind^{L_1}_{L_1\cap s_1Ls_1^{-1}}((s_1\tau)_{s_1\lambda},x)e'_1,e_1).$$

La fonction du premier type ci-dessus est donc aussi du premier type de l'assertion (10). De même pour les fonctions du deuxième type. Reste celles du troisième type ci-dessus. Or la démonstration du corollaire V.2.3 de [W2] s'applique à ces fonctions et montre qu'elles sont des restrictions à $i\mathcal{A}^*_{L,F}$ de fonctions rationnelles sur $(\mathcal{A}^*_L\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C})/i\mathcal{A}^\vee_{L,F}$, holomorphes au voisinage de $i\mathcal{A}_{L,F}^*$. Ces fonctions sont donc du quatrième type de l'assertion (10). Cela démontre cette assertion.

A l'aide de (10), on voit que l'expression qui définit $\Phi_{N,Y,Q_1,s_1,s_2}(g')$ est absolument convergente : puisqu'il n'y a pas de singularité en λ, il suffit de reprendre la preuve déjà faite pour $\Phi_N(g')$. On a alors

$$\Phi_{N,Y,Q_1,w}(g') = \sum_{s_1,s_2\in W(L_1|G|L)} \Phi_{N,Y,Q_1,s_1,s_2}(g').$$

Il suffit de prouver que, pour tous s_1, s_2, on a une majoration

$$|\Phi_{N,Y,Q_1,s_1,s_2}(g')| << N^{-R}.$$

Fixons s_1, s_2. Posons $s = s_1 s_2^{-1}$. Supposons d'abord vérifiée l'hypothèse

(Hyp) *il n'existe pas de sous-groupe parabolique $Q_2 = L_2U_2 \in \mathcal{F}_{M_{min}}$ tel que $Q_1 \subset Q_2 \neq G$ et que s fixe tout point de $\mathcal{A}_{L_2}$.*

Dans ce cas, introduisons une fonction

$$\Psi_{N,Y,Q_1,s_1,s_2}(g') = \int_{i\mathcal{A}_{L,F}^*} f_4(\lambda) \int_K \int_K \int_{M_{min}(F)^+} f_1(m',\lambda) f_2(m,\lambda) f_3(k_1,k_2,k_3,k_4,k')$$

$$D(m)\kappa_N(k_1 m k_2)\sigma_{M_{min}}^{Q_1}(\zeta,\mathcal{Y})\tau_{Q_1}(\zeta - Y_{Q_1})dm\, dk_1\, dk_2\, d\lambda$$

où f_1, f_2, f_3 et f_4 vérifient les conditions de l'assertion (10). Cette assertion nous dit que $\Phi_{N,Y,Q_1,s_1,s_2}(g')$ est combinaison linéaire de fonctions de ce type. On va majorer $|\Psi_{N,Y,Q_1,s_1,s_2}(g')|$. Pour tout $x \in L_1(F)$, on choisit des éléments $l_{s_1}(x) \in s_1 L(F) s_1^{-1}$, $u_{s_1}(x) \in L_1(F) \cap s_1 U_Q(F) s_1^{-1}$ et $k_{s_1}(x) \in K_1$ de sorte que $x = l_{s_1}(x)u_{s_1}(x)k_{s_1}(x)$. On a l'égalité

$$f_1(m',\lambda) = \int_{K_1} f_1'(m',x)exp(-(s_1\lambda)(H_{L_1\cap s_1 Q s_1^{-1}}(xm')))dx,$$

où

$$f_1'(m',x) = \delta_{Q_1}(m')^{-1/2}((s_1\tau)(l_{s_1}(xm'))(e_1'(k_{s_1}(xm'))), e_1(x))\delta_{L_1\cap s_1 Q s_1}^{L_1}(l_{s_1}(xm'))^{1/2}.$$

Le produit scalaire figurant dans cette expression est celui de deux éléments de $E_{s_1\tau} = E_\tau$. On écrit $f_2(m,\lambda)$ de la même façon et on obtient

$$\Psi_{N,Y,Q_1,s_1,s_2}(g') = \int_K \int_K \int_{M_{min}(F)^+} \int_{K_1} \int_{K_1} f_3(k_1,k_2,k_3,k_4,k')D(m)\kappa_N(k_1 m k_2)$$

$$\sigma_{M_{min}}^{Q_1}(\zeta,\mathcal{Y})\tau_{Q_1}(\zeta - Y_{Q_1})f_1'(m',x)f_2'(m,y)f_5(xm',ym)dy\, dx\, dm\, dk_1\, dk_2$$

où

$$f_5(xm',ym) = \int_{i\mathcal{A}_{L,F}^*} f_4(\lambda)exp(-(s_1\lambda)(H_{L_1\cap s_1 Q s_1^{-1}}(xm')) + (s_2\lambda)(H_{L_1\cap s_2 Q s_2^{-1}}(ym)))d\lambda.$$

Par le changement de variable $\lambda \mapsto s_1^{-1}\lambda$, on a

$$f_5(xm',ym) = \int_{i\mathcal{A}_{s_1 L s_1,F}^*} f_4(s_1^{-1}\lambda)exp(-\lambda(\zeta(xm',ym)))d\lambda,$$

où
$$\zeta(xm',ym)=H_{L_1\cap s_1Qs_1^{-1}}(xm'))-s(H_{L_1\cap s_2Qs_2^{-1}}(ym)).$$
On suppose toujours, comme il est loisible, que m vérifie la relation $\sigma_{M_{min}}^{Q_1}(\zeta,\mathcal{Y})\tau_{Q_1}(\zeta-Y_{Q_1})=1$. Munissons $\mathcal{A}_{M_{min}}$ d'une norme euclidienne $|.|$ invariante par l'action de W^G. Montrons que

(11) on a la minoration
$$|\zeta(xm',ym)|>>log(N)$$
pour tous $x,y\in K_1$ pourvu que c_1 soit assez grand.

Posons $\zeta(xm')=H_{P_{min}}(xm')$, $\zeta(ym)=H_{P_{min}}(ym)$. Rappelons que, par définition de $W(L_1|G|L)$, on a $L_1\cap P_{min}\subset L_1\cap s_1Qs_1^{-1}$, $L_1\cap P_{min}\subset L_1\cap s_2Qs_2^{-1}$. On en déduit que
$$\zeta(xm',ym)=(\zeta(xm')-s\zeta(ym))_{s_1Ls_1^{-1}},$$
où, comme toujours, $\zeta''\mapsto\zeta''_{s_1Ls_1^{-1}}$ désigne la projection orthogonale de $\mathcal{A}_{M_{min}}$ sur $\mathcal{A}_{s_1Ls_1^{-1}}$. Il suffit de minorer $|(\zeta(xm')-s\zeta(ym))_{L_1}|$. Parce que $x,y\in K_1$ et $k_3m'k_4=l'm$, avec $k_3,k_4\in K_1$, on a les égalités
$$\zeta(xm')_{L_1}=\zeta'_{L_1}=\zeta_{L_1}+H_{L_1}(l')=\zeta(ym)_{L_1}+H_{L_1}(l').$$
Puisque $\sigma(l')<<\sigma(g')\leq Clog(N)$, on a la majoration $|H_{L_1}(l')|<<log(N)$. Il nous suffit de montrer que, pour tout $c>0$, on a la minoration
$$|(\zeta(ym)-s\zeta(ym))_{L_1}|>clog(N)$$
pourvu que c_1 soit assez grand. Soit $c>0$. Le même calcul qu'en (8) montre que l'on a une majoration
$$\beta(\zeta(ym))>clog(N)$$
pour toute racine β de $A_{M_{min}}$ dans $\mathfrak{u}_1$, pourvu que c_1 soit assez grand. A fortiori $\beta(\zeta(ym))>0$. Introduisons un élément $P'_{min}\in\mathcal{P}(M_{min})$ tel que $\zeta(ym)\in\mathcal{A}^+_{P'_{min}}$. La relation précédente entraîne que $P'_{min}\subset Q_1$. Notons Δ' la base de racines simples associée à P'_{min}, $(\Delta')^{L_1}$ le sous-ensemble associé à $L_1\cap P'_{min}$, $\{\check{\alpha};\alpha\in\Delta'\}$ l'ensemble de coracines associé à Δ', et $\{\varpi_\alpha;\alpha\in\Delta'\}$ la base de $\mathcal{A}_{M_{min}}$ duale de Δ'. Ecrivons
$$\zeta(ym)=\sum_{\alpha\in\Delta'}\alpha(\zeta(ym))\varpi_\alpha.$$
Tous les coefficients sont positifs ou nuls. On a
$$(\zeta(ym)-s\zeta(ym))_{L_1}=\sum_{\alpha\in\Delta'}\alpha(\zeta(ym))(\varpi_\alpha-s\varpi_\alpha)_{L_1}.$$
On sait que, pour tout $\alpha\in\Delta'$, $\varpi_\alpha-s\varpi_\alpha$ est combinaison linéaire à coefficients positifs ou nuls de coracines $\check{\beta}$ pour $\beta\in\Delta'$. Donc $(\varpi_\alpha-s\varpi_\alpha)_{L_1}$ appartient au cône fermé engendré par les $\check{\beta}_{L_1}$ pour $\beta\in\Delta'-(\Delta')^{L_1}$. Si $\alpha\in\Delta'-(\Delta')^{L_1}$, l'élément $(\varpi_\alpha-s\varpi_\alpha)_{L_1}$ n'est pas nul. En effet, s'il l'était, on aurait
$$(s\varpi_\alpha)_{L_1}=(\varpi_\alpha)_{L_1}=\varpi_\alpha.$$
Puisque $s\varpi_\alpha$ est de même norme que ϖ_α, cela entraînerait
$$s\varpi_\alpha=(s\varpi_\alpha)_{L_1}=\varpi_\alpha.$$

Mais cette égalité est interdite par l'hypothèse (Hyp), d'où la conclusion. Des propriétés ci-dessus résulte une minoration

$$|(\zeta(ym)-s\zeta(ym))_{L_1}| >> \sum_{\alpha\in\Delta'-(\Delta')^{L_1}}\alpha(\zeta(ym)).$$

Mais on a dit ci-dessus que $\alpha(\zeta(ym)) > clog(N)$ pour tous les α qui interviennent ici. La minoration cherchée en résulte, d'où (11).

La fonction f_5 est la transformée de Fourier d'une fonction C^∞ évaluée en $\zeta(xm', ym)$. Elle est donc à décroissance rapide en cette variable. Grâce à (11), pour tout entier $D\geq 0$, on a une majoration

$$|f_5(xm', ym)| << N^{-D}$$

pourvu que c_1 soit assez grand. On a aussi

$$|\Psi_{N,Y,Q_1,s_1,s_2}(g')| << N^{-D}\int_K\int_K\int_{M_{min}(F)^+}\int_{K_1}\int_{K_1} D(m)\kappa_N(k_1mk_2)$$

$$\sigma_{M_{min}}^{Q_1}(\zeta,\mathcal{Y})\tau_{Q_1}(\zeta-Y_{Q_1})|f_1'(m',x)f_2'(m,y)|dy\,dx\,dm\,dk_1\,dk_2.$$

On a

$$|f_2'(m,y)| << \delta_{Q_1}(m)^{-1/2}\delta_{L_1\cap s_2Qs_2^{-1}}^{L_1}(l_{s_2}(ym))^{1/2}\Xi^{s_2Ls_2^{-1}}(l_{s_2}(ym)).$$

D'après [W2] lemmes II.1.6 et II.1.1, on en déduit l'existence d'un réel $R_8\geq 0$ tel que

$$\int_{K_1}|f_2'(m,y)| << \delta_{Q_1}(m)^{-1/2}\Xi^{L_1}(m) << \Xi^G(m)\sigma(m)^{R_8}.$$

On a une majoration analogue pour la fonction $f_1'(m',x)$ et on obtient une majoration

$$|\Psi_{N,Y,Q_1,s_1,s_2}(g')| << N^{-D}\int_K\int_K\int_{M_{min}(F)^+} D(m)\kappa_N(k_1mk_2)$$

$$\Xi^G(l'm)\Xi^G(m)\sigma(l'm)^{R_8}\sigma(m)^{R_8}\,dm\,dk_1\,dk_2.$$

On a déjà majoré une intégrale de ce type : il existe $R_9\geq 0$ tel qu'elle soit essentiellement majorée par N^{R_9}. En tenant compte du facteur N^{-D} et en se rappelant que D est quelconque, on obtient

$$|\Psi_{N,Y,Q_1,s_1,s_2}(g')| << N^{-R}$$

pourvu que c_1 soit assez grand. C'est ce que l'on voulait démontrer.

Supposons maintenant que l'hypothèse (Hyp) n'est pas vérifiée. Dans ce cas, on va montrer que $\Phi_{N,Y,Q_1,s_1,s_2}(g') = 0$ pourvu que c_1 soit assez grand. En se rappelant la définition de ce terme, on voit qu'il suffit de prouver que, si c_1 est assez grand, l'assertion suivante est vérifiée :

(12) soient $\lambda\in i\mathcal{A}_{L,F}^*$, $m\in M_{min}(F)^+$ et $k_1,k_2\in K$; alors

$$\sum_{e\in\mathcal{B}_{\mathcal{O}}^{K_f}}\Phi_{s_1,s_2}(e,k_1mk_2,g',\lambda)=0.$$

Notons $X(\lambda)$ la somme ci-dessus. C'est une fonction méromorphe en λ (plus exactement, c'est la restriction à $i\mathcal{A}_{L,F}^*$ d'une fonction méromorphe sur $(\mathcal{A}_L^*\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C})/i\mathcal{A}_{L,F}^\vee$). Il suffit de montrer qu'elle est nulle pour presque tout λ. On peut donc supposer que tous les opérateurs d'entrelacement qui vont intervenir n'ont pas de pôles en λ et sont inversibles. Revenons à la définition de $\Phi_{s_1,s_2}(e,k_1mk_2,g',\lambda)$. On a une égalité

$$\Phi_{s_1,s_2}(e,k_1mk_2,g',\lambda)=$$

$$(J_{\tilde{Q}_{1,s_1}|s_1Qs_1^{-1}}((s_1\tau)_{s_1\lambda})\circ\gamma(s_1)\circ\pi_\lambda(m'k_4k_2)e,e_1)^{L_1}$$

$$(e_2,J_{\tilde{Q}_{1,s_2}|s_2Qs_2^{-1}}((s_2\tau)_{s_2\lambda})\circ\gamma(s_2)\circ\pi_\lambda(mk_2)\pi_\lambda(f)e)^{L_1},$$

où $e_1\in\mathcal{K}^G_{\tilde{Q}_{1,s_1},s_1\tau}$ et $e_2\in\mathcal{K}^G_{\tilde{Q}_{1,s_2},s_2\tau}$. On $\pi_\lambda(k_2)\pi_\lambda(f)e=\pi_\lambda(f')\pi_\lambda(k_2)e$, où $f'={}^{k_2}f$. Posons $\mathcal{B}^{K_f}_\natural=\{\pi_\lambda(k_2)e;e\in\mathcal{B}^{K_f}_{\mathcal{O}}\}$. C'est encore une base orthonormée de $(E^G_{Q,\tau})^{K_f}$ et on a

$$X(\lambda)=\sum_{e\in\mathcal{B}^{K_f}_\natural}(J_{\tilde{Q}_{1,s_1}|s_1Qs_1^{-1}}((s_1\tau)_{s_1\lambda})\circ\gamma(s_1)\circ\pi_\lambda(m'k_4)e,e_1)^{L_1}$$

$$(e_2,J_{\tilde{Q}_{1,s_2}|s_2Qs_2^{-1}}((s_2\tau)_{s_2\lambda})\circ\gamma(s_2)\circ\pi_\lambda(m)\pi_\lambda(f')e)^{L_1}.$$

Il existe une fonction $j_1(\lambda)$ qui est méromorphe, au même sens que ci-dessus, telle que

$$J_{\tilde{Q}_{1,s_1}|s_1Qs_1^{-1}}((s_1\tau)_{s_1\lambda})\circ\gamma(s_1)=j_1(\lambda)J_{\tilde{Q}_{1,s_1}|s\tilde{Q}_{1,s_2}s^{-1}}((s_1\tau)_{s_1\lambda})\circ\gamma(s)\circ J_{\tilde{Q}_{1,s_2}|s_2Qs_2^{-1}}((s_2\tau)_{s_2\lambda})\circ\gamma(s_2).$$

L'ensemble

$$\{J_{\tilde{Q}_{1,s_2}|s_2Qs_2^{-1}}((s_2\tau)_{s_2\lambda})\circ\gamma(s_2)e;e\in\mathcal{B}^{K_f}_\natural\}$$

est une base de $(\mathcal{K}^G_{\tilde{Q}_{1,s_2},\tau})^{K_f}$. Les propriétés d'adjonction et de composition des opérateurs d'entrelacement entraîne qu'elle est orthogonale et que tous ses éléments ont la même norme. Notons $j_2(\lambda)$ cette norme et divisons tout élément de cette base par $\sqrt{j_2(\lambda)}$. On obtient une base orthonormée de $(\mathcal{K}^G_{\tilde{Q}_{1,s_2},\tau})^{K_f}$ que l'on note $\mathcal{B}^{K_f}_\sharp$. On a l'égalité

$$X(\lambda)=j_1(\lambda)j_2(\lambda)\sum_{e\in\mathcal{B}^{K_f}_\sharp}(J_{\tilde{Q}_{1,s_1}|s\tilde{Q}_{1,s_2}s^{-1}}((s_1\tau)_{s_1\lambda})\circ\gamma(s)\circ Ind^G_{\tilde{Q}_{1,s_2}}((s_2\tau)_{s_2\lambda},m'k_4)e,e_1)^{L_1}$$

$$(e_2,Ind^G_{\tilde{Q}_{1,s_2}}((s_2\tau)_{s_2\lambda},m)Ind^G_{\tilde{Q}_{1,s_2}}((s_2\tau)_{s_2\lambda},f')e)^{L_1}.$$

A ce point, le sous-groupe parabolique $Q=LU_Q$ n'intervient plus (sauf via les fonctions j_1 et j_2). Pour simplifier les notations, on peut supposer $s_2=1$ et $Q=\tilde{Q}_{1,s_2}$. Auquel cas $s_1=s$ et l'expression précedente se simplifie en

$$X(\lambda)=j_1(\lambda)j_2(\lambda)\sum_{e\in\mathcal{B}^{K_f}_\sharp}(J_{\tilde{Q}_{1,s}|sQs^{-1}}((s\tau)_{s\lambda})\circ\gamma(s)\circ\pi_\lambda(m'k_4)e,e_1)^{L_1}$$

$$(e_2,\pi_\lambda(m)\pi_\lambda(f')e)^{L_1}.$$

Puisque l'hypothèse (Hyp) n'est pas vérifiée, on peut fixer un sous-groupe parabolique $Q'=L'U'\in\mathcal{F}(M_{min})$ tel que $Q_1\subset Q'\neq G$ et s fixe tout élément de $\mathcal{A}_{L'}$. Cela entraîne $s\in W^{L'}$. On a $Q\subset\bar{Q}_1\subset\bar{Q}'$, donc aussi $\tilde{Q}_{1,s}\subset\bar{Q}'$. Introduisons les espaces $\mathcal{K}^{L'}_{L'\cap Q,\tau}$ et $\mathcal{K}^{L'}_{L'\cap\tilde{Q}_{1,s},\tau}$. On dispose de l'opérateur

$$J^{L'}_{L'\cap\tilde{Q}_{1,s}|L'\cap sQs^{-1}}((s\tau)_{s\lambda})\circ\gamma(s):\mathcal{K}^{L'}_{L'\cap Q,\tau}\to\mathcal{K}^{L'}_{L'\cap\tilde{Q}_{1,s},\tau}.$$

Posons $\pi' = Ind_{L'\cap Q}^{L'}(\tau_\lambda)$ et réalisons cette représentation dans $\mathcal{K}_{L'\cap Q,\tau}^{L'}$. Pour $e \in \mathcal{K}_{\bar{Q}',\pi'}^{G}$, posons

$$b_1(e) = \delta_{Q'}(m'k_4)^{-1/2} \int_{K_1} ((J_{L'\cap\tilde{Q}_{1,s}|L'\cap sQs^{-1}}^{L'}((s\tau)_{s\lambda}) \circ \gamma(s) \circ \pi'(m'k_4)(e(1)))(x), e_1(x))dx,$$

$$b_2(e) = \delta_{Q'}(m)^{-1/2} \int_{K_1} (e_2(x), (\pi'(m)(e(1)))(x))dx.$$

Expliquons par exemple la signification de

$$(J_{L'\cap\tilde{Q}_{1,s}|L'\cap sQs^{-1}}^{L'}((s\tau)_{s\lambda}) \circ \gamma(s) \circ \pi'(m'k_4)(e(1)))(x).$$

On évalue e au point 1. On obtient un élément $e(1)$ de $\mathcal{K}_{L'\cap Q,\tau}^{L'}$. On applique successivement à cet élément les opérateurs $\pi'(m'k_4)$ (notons que $m'k_4 \in L_1(F) \subset L'(F)$) puis $J_{L'\cap\tilde{Q}_{1,s}|L'\cap sQs^{-1}}^{L'}((s\tau)_{s\lambda}) \circ \gamma(s)$. On obtient un élément de $\mathcal{K}_{L'\cap\tilde{Q}_{1,s},s\tau}^{L'}$, que l'on évalue au point $x \in K_1 \subset K \cap L'(F)$. Définissons une forme sesquilinéaire B sur $\mathcal{K}_{\bar{Q}',\pi'}^{G}$ par

$$B(e', e) = b_1(e')b_2(e).$$

Identifions $\mathcal{K}_{Q,\tau}^{G}$ à $\mathcal{K}_{\bar{Q}',\pi'}^{G}$. Modulo cette identification, on a les égalités

$$(e_2, \pi_\lambda(m)e)^{L_1} = b_2(e),$$

$$(J_{\tilde{Q}_{1,s}|sQs^{-1}}((s\tau)_{s\lambda}) \circ \gamma(s) \circ \pi_\lambda(m'k_4)e, e_1)^{L_1} = b_1(e),$$

pour tout $e \in \mathcal{K}_{\bar{Q}',\pi'}^{G}$. Alors

$$X(\lambda) = j_1(\lambda)j_2(\lambda)trace_B(Ind_{\bar{Q}'}^{G}(\pi', f')).$$

Comme f, la fonction f' est très cuspidale. Puisque $b_1(e)$ et $b_2(e)$ ne dépendent que de $e(1)$, la forme B vérifie la condition (3) de 2.1. Le lemme de ce paragraphe entraîne $X(\lambda) = 0$. Cela prouve (12) et achève la preuve de la proposition. $\square$

6.7 Utilisation des calculs spectraux d'Arthur

Les données sont les mêmes que dans le paragraphe précédent. Pour tout $\epsilon > 0$, on note $\mathcal{D}(\epsilon)$ l'ensemble des éléments $Y \in \mathcal{A}_{P_{min}}^{+}$ tels que

$$\inf\{\alpha(Y); \alpha \in \Delta\} > \epsilon sup\{\alpha(Y); \alpha \in \Delta\}.$$

Pour $L' \in \mathcal{L}(L)$ et $t \in W^{L'}(L)_{reg}$, notons $\Lambda_{\mathcal{O}}^{L'}(t)$ l'ensemble des $\lambda \in i\mathcal{A}_L^*$ tels que $t(\tau_\lambda) \simeq \tau_\lambda$. Cet ensemble est stable par translation par $i\mathcal{A}_{L,F}^{\vee} + i\mathcal{A}_{L'}^*$. L'ensemble des orbites est fini. Soit λ un élément de cet ensemble. Arthur définit en [A3] p.87 un signe, qu'il note $\epsilon_{\bar{\sigma}}(t)$ et que nous notons $\epsilon_{\tau_\lambda}(t)$. Sa définition ne nous importe pas. Il ne dépend que de l'orbite de λ. On dispose de l'opérateur $R_Q(t, \tau_\lambda)$ de $\mathcal{K}_{Q,\tau}^{G}$. Soit $Q' = L'U' \in \mathcal{P}(L')$. Posons $Q(Q') = (L' \cap Q)U'$. C'est un élément de $\mathcal{P}(L)$. Définissons sur $i\mathcal{A}_{L'}^*$ une fonction $\nu \mapsto j_{Q'}(t, \lambda, \nu)$ et, pour $g' \in G(F)$, une fonction $\nu \mapsto d_{Q'}(t, \lambda, g', \nu)$ par

$$j_{Q'}(t, \lambda, \nu) = \sum_{e \in \mathcal{B}_{\mathcal{O}}^{K_f}} (e, J_{Q(\bar{Q}')|Q}(\tau_\lambda)^{-1} J_{Q(\bar{Q}')|Q}(\tau_{\lambda+\nu}) R_Q(t, \tau_\lambda)\pi_\lambda(f)e),$$

$$d_{Q'}(t,\lambda,g',\nu) = (J_{Q(Q')|Q}(\tau_\lambda)^{-1}J_{Q(Q')|Q}(\tau_{\lambda+\nu})R_Q(t,\tau_\lambda)e'',\pi_\lambda(g')e').$$

Les opérateurs d'entrelacement peuvent avoir des pôles, mais, au moins pour λ dans un ouvert dense de $\Lambda_{\mathcal{O}}^{L'}(t)$, les fonctions ci-dessus sont bien définies pour ν proche de 0. Nous utiliserons une troisième fonction $\nu \mapsto c_{Q'}(\nu)$: c'est celle qui est notée $c_{\bar{Q}'}(\nu)$ en [A3] (12.12). Il nous est inutile de rappeler sa définition. Les trois familles de fonctions $(j_{Q'}(t,\lambda))_{Q'\in\mathcal{P}(L')}$, $(d_{Q'}(t,\lambda,g'))_{Q'\in\mathcal{P}(L')}$ et $(c_{Q'})_{Q'\in\mathcal{P}(L')}$ sont des (G,L')-familles. De plus $c_{Q'}(0)=1$ pour tout Q'. Posons $(jdc)_{Q'}(t,\lambda,g') = j_{Q'}(t,\lambda)d_{Q'}(t,\lambda,g')c_{Q'}$. La famille $((jdc)_{Q'}(t,\lambda,g'))_{Q'\in\mathcal{P}(L')}$ est encore une (G,L')-famille, à laquelle on associe un nombre $(jdc)_{L'}(t,\lambda,g')$. Admettons un instant que ce nombre soit fonction C^∞ de λ. Rappelons par ailleurs que, puisque $t \in W^{L'}(L)_{reg}$, l'opérateur $t-1$ sur $\mathcal{A}_L/\mathcal{A}_{L'}$ est inversible et a donc un déterminant $det(t-1)_{\mathcal{A}_L/\mathcal{A}_{L'}}$ non nul. Posons

$$\Phi(g') = [i\mathcal{A}_{\mathcal{O}}^\vee; i\mathcal{A}_{L,F}^\vee]^{-1} \sum_{L'\in\mathcal{L}(L)} \sum_{t\in W^{L'}(L)_{reg}} \sum_{\lambda\in\Lambda_{\mathcal{O}}^{L'}(t)/(i\mathcal{A}_{L,F}^\vee + i\mathcal{A}_{L'}^*)} \epsilon_{\tau_\lambda}(t)|det(t-1)_{\mathcal{A}_L/\mathcal{A}_{L'}}|^{-1}$$

$$\int_{i\mathcal{A}_{L',F}^*} (jdc)_{L'}(t,\lambda+\mu,g')\varphi(\lambda+\mu)d\mu.$$

Proposition. *(i) Pour tout $L' \in \mathcal{L}(L)$, la fonction $\lambda \mapsto (jdc)_{L'}(t,\lambda,g')$ est C^∞.*

(ii) Soit $\epsilon > 0$ et $R \geq 1$ un entier. On a une majoration

$$|\Phi_Y(g') - \Phi(g')| << \sigma(g')^R \Xi^G(g')|Y|^{-R}$$

pour tout $g' \in G(F)$ et tout $Y \in \mathcal{D}(\epsilon) \cap \mathcal{A}_{M_{min},F}$.

Preuve. Fixons ϵ et R. Oublions d'abord g', c'est-à-dire supposons $g'=1$. Supposons aussi que la fonction φ est constante de valeur 1. Dans [A3] p.69, Arthur étudie une expression qu'il note $K^T(f)$. C'est une somme sur $M \in \mathcal{L}(M_{min})$, $\sigma \in \{\Pi_2(M(F))\}$ d'expressions qui sont des intégrales sur $i\mathcal{A}_{M,F}^* \times G(F)$. Dans le cas où le T d'Arthur est notre Y et où le couple (M,σ) d'Arthur est égal à notre couple (L,τ), cette expression est presque notre terme $\Phi_Y(1)$. Plus précisément, notre terme dépend d'éléments fixés e', e'' et le terme d'Arthur est égal à la somme de nos termes $\Phi_Y(1)$ associés à un nombre fini de couples (e',e''). Dans [A3], proposition 11.3, p.88, figure une expression $\tilde{J}(f)$. C'est une somme sur les couples (M,σ) comme ci-dessus d'expressions qui, pour le couple $(M,\sigma)=(L,\tau)$, sont presqu'égales à notre terme $\Phi(1)$. Plus exactement, ce terme est la somme de termes $\Phi(1)$ associés aux mêmes couples (e',e'') que ci-dessus. Arthur démontre en [A3] corollaire 10.4 que les fonctions $\lambda \mapsto (jcd)_{L'}(t,\lambda,1)$ sont C^∞. Entre les pages 69 et 88 de [A3], il démontre le résultat suivant. Il existe une fonction $T \mapsto J^T(f)$ qui vérifie les trois conditions

(1) il existe un entier $D \geq 1$ et, pour tout $\xi \in (\frac{1}{D}\mathcal{A}_{M_{min},F})/\mathcal{A}_{M_{min},F}$, un polynôme $T \mapsto q_\xi(T)$, de sorte que $J^T(f) = \sum_{\xi\in(\frac{1}{D}\mathcal{A}_{M_{min},F})/\mathcal{A}_{M_{min},F}} exp(\xi(T))q_\xi(T)$ pour tout $T \in \mathcal{A}_{M_{min},F}$;

(2) $\tilde{J}(f) = q_0(0)$;

(3) on a une majoration $|K^T(f) - J^T(f)| << |T|^{-R}$ pour tout $T \in \mathcal{D}(\epsilon) \cap \mathcal{A}_{M_{min},F}$.

Cf. la preuve du lemme 11.1 de [A3]. En inspectant la preuve, on voit d'une part que la somme sur les couples (M,σ) ne sert à rien dans ce passage : la preuve se fait terme par terme. D'autre part sommer sur un ensemble fini de couples ne sert à rien non plus, la même preuve s'applique pour chaque couple. En revenant à nos notations, cette preuve montre donc qu'il existe une fonction $Y \mapsto \Phi^Y$ sur $\mathcal{A}_{M_{min},F}$, de la forme

$$(4) \qquad \Phi^Y = \sum_{\xi \in (\frac{1}{D}\mathcal{A}_{M_{min},F})/\mathcal{A}_{M_{min},F}} exp(\xi(Y))q_\xi(Y),$$

telle que $\Phi(1) = p_0(0)$ et telle que l'on ait une majoration

$$(5) \qquad |\Phi_Y(1) - \Phi^Y| << |Y|^{-R}$$

pour tout $Y \in \mathcal{D}(\epsilon) \cap \mathcal{A}_{M_{min},F}$. Montrons qu'en fait

(6) p_0 est constant et $p_\xi = 0$ si $\xi \neq 0$.

Remarquons que, pour $Y \in \mathcal{D}(\epsilon)$, on a des majorations

$$|Y| << sup\{\alpha(Y); \alpha \in \Delta\} << |Y|.$$

On peut donc remplacer $sup\{\alpha(Y); \alpha \in \Delta\}$ par $|Y|$ dans l'énoncé de la proposition 6.6. Fixons c_1 et c_2 vérifiant cet énoncé modifié. Soit $Y \in \mathcal{D}(\epsilon) \cap \mathcal{A}_{M_{min},F}$. Notons N_Y la partie entière de $2c_2|Y| + 1$. Si $|Y|$ est assez grand, le couple (N_Y, Y) vérifie les conditions de la proposition 6.6. Plus généralement, il en est de même du couple (N_Y, Y') pour tout $Y' \in \mathcal{D}(\epsilon) \cap \mathcal{A}_{M_{min}}$ tel que $|Y - Y'| \leq |Y|/2$. Pour un tel Y', on a donc

$$|\Phi_{Y'}(1) - \Phi_Y(1)| << |\Phi_{Y'}(1) - \Phi_{N_Y}(1)| + |\Phi_{N_Y}(1) - \Phi_Y(1)| << N_Y^{-R} << |Y|^{-R}.$$

En appliquant (5), on a aussi

$$|\Phi^{Y'} - \Phi^Y| << |Y|^{-R}.$$

Si $Y \mapsto \Phi^Y$ ne vérifie pas (6), c'est-à-dire n'est pas constante, on peut fixer $Y_0 \in \mathcal{A}_{M_{min},F}$ tel que la fonction $Y \mapsto \Phi^{Y+Y_0} - \Phi^Y$ soit non nulle. Cette fonction est encore de la forme (4). Pour Y assez grand, le point $Y' = Y + Y_0$ vérifie $|Y - Y'| \leq |Y|/2$. La fonction est donc essentiellement majorée par $|Y|^{-R}$. Mais une fonction de la forme (4) ne peut vérifier cette majoration que si elle est nulle. Cela contredit le choix de Y_0, d'où (6).

Grâce à (6), on a $\Phi(1) = \Phi^Y$ et la majoration (5) est celle que l'on voulait prouver.

Si φ n'est plus la fonction constante de valeur 1, on inspecte la preuve d'Arthur et on voit que l'on peut glisser la fonction φ tout le long de cette preuve. Le résultat est celui annoncé. Bien sûr, la constante qui se trouve implicitement dans la majoration de l'énoncé dépend de φ. Cela ne nous gêne pas pourvu que φ soit fixée mais, pour la suite du raisonnement, précisons tout-de-même cette dépendance. Pour tout entier $k \geq 0$, fixons une base $\mathcal{X}_k$ de l'espace des opérateurs différentiels sur $i\mathcal{A}_L^*$, à coefficients constants et de degré $\leq k$. Posons

$$|\varphi|_k = sup\{|(X\varphi)(\lambda); \lambda \in i\mathcal{A}_{L,F}^*, X \in \mathcal{X}_k\}.$$

Dans la preuve d'Arthur, les approximations interviennent à deux endroits. D'abord dans l'utilisation du théorème 8.1. Cette approximation porte uniquement sur l'intégrale intérieure sur $G(F)$. Quand on intègre ensuite sur $i\mathcal{A}_{L,F}^*$, la constante implicite est simplement multipliée par $|\varphi|_0$. Il y a ensuite les approximations de la page 80 qui se réfèrent elles-mêmes à [A6], p. 1306,1307. D'après cette dernière référence, la constante implicite est de la forme

$$sup\{(\Psi\varphi)\check{}(Z)|Z|^R; Z \in \mathcal{A}_{L,F}\},$$

où Ψ est une certaine fonction C^∞ sur $i\mathcal{A}_{L,F}^*$ indépendante de φ et $(\Psi\varphi)\hat{}$ est la transformée de Fourier de $\Psi\varphi$. Comme on le sait bien, le terme ci-dessus est essentiellement borné par $|\varphi|_R$. Finalement, la majoration de l'énoncé se précise en

$$(7) \qquad |\Phi_Y(1) - \Phi(1)| \leq c|\varphi|_R|Y|^{-R}$$

où c est indépendant de φ.

Passons au cas général où g' est quelconque. Fixons un sous-groupe ouvert compact K_0 de K tel que e'' soit invariant par K_0. On utilise le fait que la fonction $g \mapsto u(g, Y)$ est invariante à gauche par K (ce que n'était pas la fonction $g \mapsto \kappa_N(g)$ des paragraphes précédents). Dans la définition de $\Phi_Y(g')$ donnée au début du paragraphe 6.6, on remplace la variable g par kg et on intègre sur $k \in K_0$, en divisant le tout par $mes(K_0)$. On obtient une expression analogue à $\Phi_Y(g')$, où le terme $\pi_\lambda(g')e'$ est remplacé par

$$mes(K_0)^{-1}\int_{K_0} \pi_\lambda(kg')e'.$$

Fixons une base orthonormée $\mathcal{B}_{\mathcal{O}}^{K_0}$ de $\mathcal{K}_{Q,\tau}^{K_0}$. On peut encore remplacer le terme ci-dessus par

$$\sum_{e_0 \in \mathcal{B}_{\mathcal{O}}^{K_0}} (e_0, \pi_\lambda(g')e')e_0.$$

Alors $\Phi_Y(g')$ est une somme de termes analogues où le triplet (g', e', φ) est remplacé par $(1, e_0, \varphi')$, où

$$\varphi'(\lambda) = \varphi(\lambda)(e_0, \pi_\lambda(g')e').$$

Une décomposition analogue vaut pour le terme $\Phi(g')$. En utilisant la majoration (7), on voit que, pour obtenir la majoration de l'énoncé, il nous reste à prouver que l'on a une majoration

$$|\varphi'|_R << \sigma(g')^R \Xi^G(g')$$

pour toute fonction φ' comme ci-dessus. Il suffit de prouver une majoration analogue pour la fonction $\varphi''(\lambda) = (e_0, \pi_\lambda(g')e')$. On a

$$\varphi''(\lambda) = \int_K (e_0(k), \tau(l_Q(kg'))e'(k_Q(kg'))\delta_Q(l_Q(kg'))^{1/2} exp(\lambda(H_Q(kg')))dk.$$

Appliquer un opérateur différentiel $X \in \mathcal{X}_R$ revient à glisser dans l'intégrale un terme $P(H_Q(kg'))$, où P est un polynôme de degré $\leq R$. On a une majoration

$$|H_Q(kg')| << \sigma(kg') = \sigma(g').$$

D'où les majorations

$$|\varphi''| << \sigma(g')^R \int_K |(e_0(k), \tau(l_Q(kg'))e'(k_Q(kg'))|\delta_Q(l_Q(kg'))^{1/2}dk$$

$$<< \sigma(g')^R \int_K \Xi^L(l_Q(kg'))\delta_Q(l_Q(kg'))^{1/2}dk$$

$$<< \sigma(g')^R \Xi^G(g')$$

d'après [W2] lemme II.1.6. C'est ce que l'on voulait démontrer. □

6.8 Simplification de $\Phi(g')$

Pour $L' \in \mathcal{L}(L)$ et $\lambda \in i\mathcal{A}_L^*$, on définit les groupes $W^{L'}(\tau_\lambda)$, $(W^{L'})'(\tau_\lambda)$ et $R^{L'}(\tau_\lambda)$: ce sont les analogues de $W(\tau_\lambda)$, $W'(\tau_\lambda)$ et $R(\tau_\lambda)$ quand on remplace G par L'. Notons $\Lambda_{\mathcal{O},ell}^{L'}$ l'ensemble des $\lambda \in i\mathcal{A}_L^*$ tels que $R^{L'}(\tau_\lambda) \cap W^{L'}(L)_{reg} \neq \emptyset$. Cet ensemble est stable par translations par $i\mathcal{A}_{L,F}^\vee + i\mathcal{A}_{L'}^*$. Soit λ un élément de cet ensemble. On a décrit le groupe $R^{L'}(\tau_\lambda)$ en 4.1. Notons $R^{L'}(\tau_\lambda)^\vee$ son groupe dual. La représentation $Ind_{L'\cap Q}^{L'}(\tau_\lambda)$ se décompose en somme de sous-représentations irréductibles $Ind_{L'\cap Q}^{L'}(\tau_\lambda,\zeta)$ pour $\zeta \in R^{L'}(\tau_\lambda)^\vee$. On a conformément la décomposition en somme orthogonale

$$\mathcal{K}_{L'\cap Q,\tau}^{L'} = \oplus_{\zeta\in R^{L'}(\tau_\lambda)^\vee}\mathcal{K}_{L'\cap Q,\tau_\lambda,\zeta}^{L'}.$$

Fixons $S' = L'U' \in \mathcal{P}(L')$ et, comme dans le paragraphe précédent, notons $Q(S') = (L'\cap Q)U' \in \mathcal{P}(L)$. L'opérateur $R_{Q(S')|Q}(\tau_\lambda)$ est une isométrie de $\mathcal{K}_{Q,\tau}^G$ sur $\mathcal{K}_{Q(S'),\tau}^G$. D'autre part, ce dernier espace s'identifie à un espace de fonctions de K dans $\mathcal{K}_{L'\cap Q,\tau}^{L'}$. La décomposition ci-dessus de cet espace induit une décomposition orthogonale

$$(1) \qquad \mathcal{K}_{Q(S'),\tau}^G = \oplus_{\zeta\in R^{L'}(L)}\mathcal{K}_{Q(S'),\tau_\lambda,\zeta}^G.$$

Notons $proj_{\lambda,\zeta}$ la projection de $\mathcal{K}_{Q(S'),\tau}^G$ sur $\mathcal{K}_{Q(S'),\tau_\lambda,\zeta}^G$. Remarquons que ces sous-espaces et ces projections ne dépendent que de l'orbite de λ. Rappelons d'autre part que l'on note $a_{L'}$ la dimension de $\mathcal{A}_{L'}$.

Lemme. *Pour tout $g' \in G(F)$, on a l'égalité*

$$\Phi(g') = [i\mathcal{A}_\mathcal{O}^\vee : i\mathcal{A}_{L,F}^\vee]^{-1}\sum_{L'\in\mathcal{L}(L)}(-1)^{a_{L'}}\sum_{\lambda\in\Lambda_{\mathcal{O},ell}^{L'}/(i\mathcal{A}_{L,F}^\vee+i\mathcal{A}_{L'}^*)}|R^{L'}(\tau_\lambda)|2^{a_{L'}-a_L}\sum_{\zeta\in R^{L'}(\tau_\lambda)^\vee}$$

$$\int_{i\mathcal{A}_{L',F}^*}(proj_{\lambda,\zeta}\circ R_{Q(S')|Q}(\tau_{\lambda+\mu})e'', proj_{\lambda,\zeta}\circ R_{Q(S')|Q}(\tau_{\lambda+\mu})\circ Ind_Q^G(\tau_{\lambda+\mu},g')e')$$

$$J_{L'}^G(Ind_{L'\cap Q}^{L'}(\tau_{\lambda+\mu},\zeta),f)\varphi(\lambda+\mu)d\mu.$$

Preuve. Fixons $L' \in \mathcal{L}(L)$, $t \in W^{L'}(L)_{reg}$ et $\lambda \in \Lambda_\mathcal{O}^{L'}(t)$. Considérons le terme $(jdc)_{L'}(t,\lambda,g')$. On commence par remplacer, dans les définitions des (G,L')-familles $(j_{Q'}(t,\lambda))_{Q'\in\mathcal{P}(L')}$ et $(d_{Q'}(t,\lambda,g'))_{Q'\in\mathcal{P}(L')}$, les opérateurs d'entrelacement par des opérateurs normalisés. Cela multiplie ces familles par des (G,L')-familles à valeurs scalaires. Quitte à multiplier la (G,L')-famille $(c_{Q'})_{Q'\in\mathcal{P}(L')}$ par ces familles, on retrouve une expression similaire à celle de départ (la famille qui remplace $(c_{Q'})_{Q'\in\mathcal{P}(L')}$ dépend de λ). On peut donc considérer que l'on a

$$j_{Q'}(t,\lambda,\nu) = \sum_{e\in\mathcal{B}_\mathcal{O}^{K_f}}(e, R_{Q(\bar{Q}')|Q}(\tau_\lambda)^{-1}R_{Q(\bar{Q}')|Q}(\tau_{\lambda+\nu})R_Q^{L'}(t,\tau_\lambda)\pi_\lambda(f)e).$$

L'ensemble $\{R_{Q(S')|Q}(\tau_\lambda)(e); e \in \mathcal{B}_\mathcal{O}^{K_f}\}$ est une base orthonormée de $\mathcal{K}_{Q(S'),\tau}^G$. Notons-la $\mathcal{B}_{\mathcal{O},Q(S')}^{K_f}$. Posons

$$j'_{Q'}(t,\lambda,\nu) = \sum_{e\in\mathcal{B}_{\mathcal{O},Q(S')}^{K_f}}(e, R_{Q(\bar{Q}')|Q(S')}(\tau_\lambda)^{-1}R_{Q(\bar{Q}')|Q(S')}(\tau_{\lambda+\nu})R_{Q(S')}^{L'}(t,\tau_\lambda)Ind_{Q(S')}^G(\tau_\lambda,f)e).$$

On a l'égalité

$$j'_{Q'}(t,\lambda,\nu)=\sum_{e\in\mathcal{B}_{\mathcal{O}}^{K_f}}(e,R_{Q(\bar{Q}')|Q}(\tau_\lambda)^{-1}R_{Q(\bar{Q}')|Q}(\tau_{\lambda+\nu})\pi_\lambda(f)r(\lambda,\nu)e),$$

où

$$r(\lambda,\nu)=R_{Q(S')|Q}(\lambda+\nu)^{-1}R_{Q(S')|Q}(\lambda).$$

Le point est que cet opérateur ne dépend pas de Q' et que $r(\lambda,0)$ est l'identité. Une propriété familière des (G,L')-familles entraîne que l'on a l'égalité

$$(j')_{L'}^{Q''}(t,\lambda)=j_{L'}^{Q''}(t,\lambda)$$

pour tout $Q''\in\mathcal{F}(L')$. D'après les formules de descente, on peut donc remplacer la famille $(j_{Q'}(t,\lambda))_{Q'\in\mathcal{P}(L')}$ par $(j'_{Q'}(t,\lambda))_{Q'\in\mathcal{P}(L')}$. De la même façon, on peut remplacer la famille $(d_{Q'}(t,\lambda,g'))_{Q'\in\mathcal{P}(L')}$ par $(d'_{Q'}(t,\lambda,g'))_{Q'\in\mathcal{P}(L')}$, où

$$d'_{Q'}(t,\lambda,g',\nu)=(R_{Q(Q')|Q(S')}(\tau_\lambda)^{-1}R_{Q(Q')|Q(S')}(\tau_{\lambda+\nu})R_{Q(S')}(t,\tau_\lambda)R_{Q(S')|Q}(\tau_\lambda)e'',$$

$$R_{Q(S')|Q}(\tau_\lambda)Ind_Q^G(\tau_\lambda,g')e').$$

Autrement dit, quitte à remplacer les éléments $Ind_Q^G(\tau_\lambda)e'$ et e'' par $R_{Q(S')|Q}(\tau_\lambda)Ind_Q^G(\tau_\lambda)e'$ et $R_{Q(S')|Q}(\tau_\lambda)e''$, on peut remplacer le parabolique Q par $Q(S')$. Les considérations qui précèdent l'énoncé sont valables indépendamment de l'hypothèse $R^{L'}(\tau_\lambda)\cap W^{L'}(L)_{reg}\neq\emptyset$. On a la décomposition (1). On peut supposer que la base $\mathcal{B}_{\mathcal{O},S'}^{K_f}$ est réunion de bases des différents sous-espaces. L'opérateur $R_{Q(S')}(t,\tau_\lambda)$ agit par $\zeta(t)$ sur le sous-espace $\mathcal{K}_{Q(S'),\tau,\zeta}^G$ (où le caractère ζ de $R^{L'}(\tau_\lambda)$ est étendu en un caractère de $W^{L'}(\tau_\lambda)$ trivial sur $(W^{L'})'(\tau_\lambda)$). On en déduit une égalité

$$j'_{Q'}(t,\lambda,\nu)=\sum_{\zeta\in R^{L'}(\tau_\lambda)^\vee}\zeta(t)j'_{Q'}(\lambda,\zeta,\nu),$$

avec une définition plus ou moins évidente de ce dernier terme. On a alors

$$(j')_{L'}^{Q''}(t,\lambda)=(-1)^{a_{L'}-a_{L''}}\sum_{\zeta\in R^{L'}(\tau_\lambda)^\vee}\zeta(t)J_{L'}^{\bar{Q}''}(Ind_{L'\cap Q}^{L'}(\tau_\lambda,\zeta),f)$$

pour tout $Q''=L''U''\in\mathcal{F}(L')$. Le signe $(-1)^{a_{L'}-a_{L''}}$ ainsi que le $\bar{Q}''$ en exposant viennent de ce que c'est le parabolique $Q(\bar{Q}')$ qui intervient dans la définition de $j'_{Q'}(t,\lambda,\nu)$, cf. [A3] p.92. Supposons $R^{L'}(\tau_\lambda)\cap W^{L'}(L)_{reg}=\emptyset$, c'est-à-dire $\lambda\not\in\Lambda_{\mathcal{O},ell}^{L'}$. Dans ce cas, toutes les représentations $Ind_{L'\cap Q}^{L'}(\tau_\lambda,\zeta)$ sont induites et les termes ci-dessus sont nuls (lemme 2.2(ii)). Grâce à la formule de descente, on obtient

(2) $(jdc)(t,\lambda,g')=0$ si $\lambda\not\in\Lambda_{\mathcal{O},ell}^{L'}$.

Supposons maintenant $R^{L'}(\tau_\lambda)\cap W^{L'}(L)_{reg}\neq\emptyset$, c'est-à-dire $\lambda\in\Lambda_{\mathcal{O},ell}^{L'}$. Le lemme 2.2(i) et la formule de descente entraîne l'égalité

$$(jdc)(t,\lambda,g')=(j')_{L'}^G(t,\lambda)d'_{Q'}(t,\lambda,g',0)c_{Q'}(\lambda,0)$$

où Q' est un élément quelconque de $\mathcal{P}(L')$. On a $c_{Q'}(\lambda,0)=1$,

$$d'_{Q'}(t,\lambda,g',0)=(R_{Q(S')}(t,\tau_\lambda)R_{Q(S')|Q}(\tau_\lambda)e'',R_{Q(S')|Q}(\tau_\lambda)Ind_Q^G(\tau_\lambda)e')$$

et
$$(j')^G_{L'}(t,\lambda)=(-1)^{a_{L'}}\sum_{\zeta\in R^{L'}(\tau_\lambda)^\vee}\zeta(t)J^G_{L'}(Ind^{L'}_{L'\cap Q}(\tau_\lambda,\zeta),f).$$
Rappelons que l'hypothèse $R^{L'}(\tau_\lambda)\cap W^{L'}(L)_{reg}\neq\emptyset$ entraîne que $(W^{L'})'(\tau_\lambda)=\{1\}$, donc $R^{L'}(\tau_\lambda)=W^{L'}(\tau_\lambda)$. De plus, $R^{L'}(\tau_\lambda)\cap W^{L'}(L)_{reg}$ possède un unique élément. Puisque t appartient à cette intersection, cet unique élément est t. Soit $x\in R^{L'}(\tau_\lambda)$, $x\neq t$. Considérons la représentation virtuelle
$$\sum_{\zeta\in R^{L'}(\tau_\lambda)^\vee}\zeta(x)Ind^{L'}_{L'\cap Q}(\tau_\lambda).$$
D'après [A5] proposition 2.1(b), c'est une somme, à coefficients dans $\mathbb{Z}$, de représentations induites. D'après le lemme 2.2(ii), on a donc
$$\sum_{\zeta\in R^{L'}(\tau_\lambda)^\vee}\zeta(x)J^G_{L'}(Ind^{L'}_{L'\cap Q}(\tau_\lambda,\zeta),f)=0.$$
Il en résulte que $\zeta(t)J^G_{L'}(Ind^{L'}_{L'\cap Q}(\tau_\lambda,\zeta),f)$ est indépendant de ζ. On en déduit l'égalité
$$(j')^G_{L'}(t,\lambda)=(-1)^{a_{L'}}|R^{L'}(\tau_\lambda)|\zeta(t)J^G_{L'}(Ind^{L'}_{L'\cap Q}(\tau_\lambda,\zeta),f)$$
pour tout $\zeta\in R^{L'}(\tau_\lambda)^\vee$. D'autre part, on peut décomposer les éléments $R_{Q(S')|Q}(\tau_\lambda)Ind^G_Q(\tau_\lambda)e'$ et $R_{Q(S')|Q}(\tau_\lambda)e''$ selon la décomposition (1). Il en résulte l'égalité
$$d'_{Q'}(t,\lambda,g',0)=\sum_{\zeta\in R^{L'}(\tau_\lambda)^\vee}\zeta(t)(proj_{\lambda,\zeta}\circ R_{Q(S')|Q}(\tau_\lambda)e'',proj_{\lambda,\zeta}\circ R_{Q(S')|Q}(\tau_\lambda)\circ Ind^G_Q(\tau_\lambda,g')e').$$
Des deux égalités précédentes résulte la relation

(3) si $\lambda\in\Lambda^{L'}_{\mathcal{O},ell}$,
$$(jdc)_{L'}(t,\lambda,g')=(-1)^{a_{L'}}|R^{L'}(\tau_\lambda)|\sum_{\zeta\in R^{L'}(\tau_\lambda)^\vee}$$
$$(proj_{\lambda,\zeta}\circ R_{Q(S')|Q}(\tau_\lambda)e'',proj_{\lambda,\zeta}\circ R_{Q(S')|Q}(\tau_\lambda)\circ Ind^G_Q(\tau_\lambda,g')e')J^G_{L'}(Ind^{L'}_{L'\cap Q}(\tau_\lambda,\zeta),f).$$
D'autre part, le signe $\epsilon_{\tau_\lambda}(t)$ vaut 1 parce que $(W^{L'})'(\tau_\lambda)=\{1\}$, cf. [A3] p.95. Enfin, on a décrit t en 4.2 et on voit que $|det(t-1)_{\mathcal{A}_L/\mathcal{A}_{L'}}|^{-1}=2^{a_{L'}-a_L}$. Il suffit de reporter ces égalités et celles des relations (2) et (3) dans la définition de $\Phi(g')$ pour obtenir l'égalité de l'énoncé. $\square$

6.9 Evaluation d'une limite

Lemme. *On a l'égalité*
$$lim_{N\to\infty}I_{L,\mathcal{O},N,C}(\theta_\rho,f)=[i\mathcal{A}^\vee_{\mathcal{O}}:i\mathcal{A}^\vee_{L,F}]^{-1}\sum_{L'\in\mathcal{L}(L)}(-1)^{a_{L'}}\sum_{\lambda\in\Lambda^{L'}_{\mathcal{O},ell}/(i\mathcal{A}^\vee_{L,F}+i\mathcal{A}^*_{L'})}$$
$$|R^{L'}(\tau_\lambda)|2^{a_{L'}-a_L}\sum_{\zeta\in R^{L'}(\tau_\lambda)^\vee;m(Ind^{L'}_{L'\cap Q}(\tau_\lambda,\zeta),\rho)=1}\int_{i\mathcal{A}^*_{L',F}}J^G_{L'}(Ind^{L'}_{L'\cap Q}(\tau_{\lambda+\mu},\zeta),f)d\mu.$$

Remarque. Le nombre $m(Ind_{L'\cap Q}^{L'}(\tau_\lambda,\zeta),\rho)$ a été défini en 6.1.

Preuve. Considérons la définition de $I_{L,\mathcal{O},N,C}(\theta_\rho,f)$ donnée avant le lemme 6.4. Il y intervient des objets e_j, e_j et φ_j pour $j=1,...,n$. Dans les paragraphes précédents, on a introduit des fonctions $\Phi_N(g')$, $\Phi_Y(g')$ et $\Phi(g')$ qui dépendaient de choix d'éléments e', e'' et d'une fonction φ. On note $\Phi_{N,j}(g')$, $\Phi_{Y,j}(g')$, $\Phi_j(g')$ ces fonctions relatives à $e'=e_j$, $e''=e'_j$, $\varphi=\varphi_j$. On a alors

$$I_{L,\mathcal{O},N,C}(\theta_\rho,f)=\sum_{j=1,...,n}\int_{H(F)U(F)_c}\mathbf{1}_{\sigma<Clog(N)}(hu)(\rho(h)\epsilon'_j,\epsilon_j)\bar{\xi}(u)\Phi_{N,j}(hu)du\,dh.$$

Fixons un réel ϵ tel que $0<\epsilon<1$ et considérons un entier $R>0$ que nous préciserons par la suite. Introduisons des constantes c_1,c_2 qui vérifient les conditions de la proposition 6.6 pour chaque couple de fonctions $(\Phi_{N,j}(g'),\Phi_{Y,j}(g'))$. Il y a une constante $c_3>0$ telle que, pour tout N, il existe $Y\in\mathcal{A}_{M_{min},F}$ tel que $c_3N<\alpha(Y)<c_2N$ pour tout $\alpha\in\Delta$. Fixons un tel c_3 et, pour tout N, un élément Y_N vérifiant ces inégalités. Si N est assez grand, Y_N vérifie les hypothèses de la proposition 6.6 et celles de la proposition 6.7 (pour chacune de nos fonctions $\Phi_{N,j}(g')$ etc...). Ces propositions entraînent que l'on a une majoration

$$|\Phi_{N,j}(g')-\Phi_j(g')|<<(1+\sigma(g')^R\Xi^G(g'))N^{-R}$$

pour tout j, tout N assez grand et tout $g'\in G(F)$ tel que $\mathbf{1}_{\sigma<Clog(N)}(g')=1$. On peut oublier le terme $\Xi^G(g')$ qui est borné. Posons

$$X_N=\sum_{j=1,...,n}\int_{H(F)U(F)_c}\mathbf{1}_{\sigma<Clog(N)}(hu)(\rho(h)\epsilon'_j,\epsilon_j)\bar{\xi}(u)\Phi_j(hu)du\,dh.$$

Alors

$$|I_{L,\mathcal{O},N,C}(\theta_\rho,f)-X_N|<<N^{-R}\int_{H(F)U(F)_c}\mathbf{1}_{\sigma<Clog(N)}(hu)\Xi^H(h)\sigma(hu)^Rdu\,dh$$

$$<<log(N)^RN^{-R}\int_{H(F)U(F)_c}\mathbf{1}_{\sigma<Clog(N)}(hu)du\,dh.$$

On peut choisir $C'>0$ tel que la condition $\sigma(hu)<Clog(N)$ entraîne $\sigma(h)<C'log(N)$ et $\sigma(u)<C'log(N)$. L'expression ci-dessus est essentiellement majorée par

$$log(N)^RN^{-R}\int_{H(F)}\mathbf{1}_{\sigma<C'log(N)}dh\int_{U(F)}\mathbf{1}_{\sigma<C'log(N)}du.$$

D'après 4.3(1) et sa preuve, il existe $R'>0$ tel que chacune de ces intégrales soit essentiellement majorée par $N^{R'}$. On obtient

$$|I_{L,\mathcal{O},N,C}(\theta_\rho,f)-X_N|<<log(N)^RN^{-R+R'}.$$

Le réel R' est indépendant de R. On choisit $R=R'+2$ et on obtient que $|I_{L,\mathcal{O},N,C}(\theta_\rho,f)-X_N|$ tend vers 0 quand N tend vers l'infini. Cela nous ramène à calculer $lim_{N\to\infty}X_N$.

On utilise le lemme 6.8 qui calcule les fonctions Φ_j. On obtient une expression de X_N que l'on peut au moins formellement écrire

$$X_N=[i\mathcal{A}_{\mathcal{O}}^\vee:i\mathcal{A}_{L,F}^\vee]^{-1}\sum_{L'\in\mathcal{L}(L)}(-1)^{a_{L'}}\sum_{\lambda\in\Lambda_{\mathcal{O},ell}^{L'}/(i\mathcal{A}_{L,F}^\vee+i\mathcal{A}_{L'}^*)}|R^{L'}(\tau_\lambda)|2^{a_{L'}-a_L}\sum_{\zeta\in R^{L'}(\tau_\lambda)^\vee}$$

$$\int_{i\mathcal{A}^*_{L',F}} X_N(L',\lambda,\mu,\zeta) J^G_{L'}(Ind^{L'}_{L'\cap Q}(\tau_{\lambda+\mu},\zeta),f)d\mu,$$

où

$$X_N(L',\lambda,\mu,\zeta) = \sum_{j=1,\dots,n} \varphi_j(\lambda+\mu) \int_{H(F)U(F)_c} \mathbf{1}_{\sigma<Clog(N)}(\rho(h)\epsilon'_j,\epsilon_j)$$

$$(proj_{\lambda,\zeta}\circ R_{Q(S')|Q}(\tau_{\lambda+\mu})e'_j, proj_{\lambda,\zeta}\circ R_{Q(S')|Q}(\tau_{\lambda+\mu})\circ Ind^G_Q(\tau_{\lambda+\mu}(hu))e_j)\bar{\xi}(u)du\,dh.$$

Cette expression est essentiellement majorée indépendamment de N, λ et μ par

$$\int_{H(F)U(F)_c} \Xi^H(h)\Xi^G(hu)du\,dh$$

et on sait que cette intégrale est convergente d'après 4.3(4). Cela justifie le calcul formel que l'on a fait ci-dessus et nous permet en même temps de calculer la limite quand N tend vers l'infini. On obtient

(1) $$lim_{N\to\infty}X_N = [i\mathcal{A}^\vee_{\mathcal{O}} : i\mathcal{A}^\vee_{L,F}]^{-1} \sum_{L'\in\mathcal{L}(L)} (-1)^{a_{L'}} \sum_{\lambda\in\Lambda^{L'}_{\mathcal{O},ell}/(i\mathcal{A}^\vee_{L,F}+i\mathcal{A}^*_{L'})} |R^{L'}(\tau_\lambda)|2^{a_{L'}-a_L}$$

$$\sum_{\zeta\in R^{L'}(\tau_\lambda)^\vee} \int_{i\mathcal{A}^*_{L',F}} X(L',\lambda,\mu,\zeta) J^G_{L'}(Ind^{L'}_{L'\cap Q}(\tau_{\lambda+\mu},\zeta),f)d\mu,$$

où

$$X(L',\lambda,\mu,\zeta) = \sum_{j=1,\dots,n} \varphi_j(\lambda+\mu) \int_{H(F)U(F)_c} (\rho(h)\epsilon'_j,\epsilon_j)$$

$$(proj_{\lambda,\zeta}\circ R_{Q(S')|Q}(\tau_{\lambda+\mu})e'_j, proj_{\lambda,\zeta}\circ R_{Q(S')|Q}(\tau_{\lambda+\mu})\circ Ind^G_Q(\tau_{\lambda+\mu}(hu))e_j)\bar{\xi}(u)du\,dh.$$

Fixons L', λ, μ et ζ. Posons $\pi' = Ind^{L'}_{L'\cap Q}(\tau_\lambda)$, $\pi'(\zeta) = Ind^{L'}_{L'\cap Q}(\tau_\lambda,\zeta)$, $\tilde{e}'_j = R_{Q(S')|Q}(\tau_{\lambda+\mu})e'_j$, $\tilde{e}_j = R_{Q(S')|Q}(\tau_{\lambda+\mu})e_j$. On récrit

(2) $$X(L',\lambda,\mu,\zeta) = \sum_{j=1,\dots,n} \varphi_j(\lambda+\mu) \int_{H(F)U(F)_c} (\rho(h)\epsilon'_j,\epsilon_j)$$

$$(proj_{\lambda,\zeta}\tilde{e}'_j, Ind^G_{S'}(\pi'(\zeta)_\mu, hu)proj_{\lambda,\zeta}\tilde{e}_j)\bar{\xi}(u)du\,dh.$$

On reconnaît

$$X(L',\lambda,\mu,\zeta) = \sum_{j=1,\dots,n} \varphi_j(\lambda+\mu)\mathcal{L}_{Ind^G_{S'}(\pi'(\zeta)_\mu),\rho,c}(\epsilon'_j\otimes proj_{\lambda,\zeta}\tilde{e}'_j, \epsilon_j\otimes proj_{\lambda,\zeta}\tilde{e}_j).$$

On a fixé c, mais on peut le supposer assez grand. Puisque L', λ et ζ ne parcourent que des ensembles finis, la preuve du lemme 3.5 nous permet de remplacer ci-dessus $\mathcal{L}_{Ind^G_{S'}(\pi'(\zeta)_\mu),\rho,c}$ par $\mathcal{L}_{Ind^G_{S'}(\pi'(\zeta)_\mu),\rho}$. D'après le lemme 5.3(ii), $\mathcal{L}_{Ind^G_{S'}(\pi'(\zeta)_\mu),\rho}$ est non nul si et seulement si $m(\pi'(\zeta),\rho) = 1$. Quand ζ parcourt $R^{L'}(\tau_\lambda)^\vee$, les représentations $\pi'(\zeta)$ parcourent les différentes composantes irréductibles de π'. D'après le lemme 5.4, il y a un unique ζ tel que $m(\pi'(\zeta),\rho) = 1$. Notons $\zeta_{\lambda,\rho}$ cet élément. On obtient

(3) si $\zeta \neq \zeta_{\lambda,\rho}$, $X(L',\lambda,\mu,\zeta) = 0$.

Ce résultat entraîne

$$X(L',\lambda,\mu,\zeta_{\lambda,\rho}) = \sum_{\zeta\in R^{L'}(\tau_\lambda)^\vee} X(L',\lambda,\mu,\zeta).$$

Grâce à (2), cette dernière somme est égale à

$$\sum_{j=1,\ldots,n} \varphi_j(\lambda+\mu) \int_{H(F)U(F)_c} (\rho(h)\epsilon'_j, \epsilon_j)(\tilde{e}'_j, Ind_{S'}^G(\pi'_\mu, hu)\tilde{e}_j)\bar{\xi}(u)du\,dh.$$

Puisque les opérateurs $R_{Q(S')|Q}(\tau_{\lambda+\mu})$ sont unitaires, on a

$$(\tilde{e}'_j, Ind_{S'}^G(\pi'_\mu, hu)\tilde{e}_j) = (e'_j, Ind_Q^G(\tau_{\lambda+\mu}, hu)e_j).$$

De nouveau, on reconnaît

$$X(L', \lambda, \mu, \zeta_{\lambda,\rho}) = \sum_{j=1,\ldots,n} \varphi_j(\lambda+\mu)\mathcal{L}_{Ind_Q^G(\tau_{\lambda+\mu}),\rho,c}(\epsilon'_j \otimes e'_j, \epsilon_j \otimes e_j).$$

On a $\mathcal{L}_{Ind_Q^G(\tau_{\lambda+\mu}),\rho,c} = \mathcal{L}_{Ind_Q^G(\tau_{\lambda+\mu}),\rho}$ et on a justement choisi les données φ_j, ϵ'_j,ϵ_j, e'_j et e_j pour que l'expression ci-dessus soit égale à 1. Donc

(4) $X(L', \lambda, \mu, \zeta_{\lambda,\rho}) = 1$.

Grâce à (3) et (4), la formule (1) devient

$$lim_{N\to\infty} X_N = [i\mathcal{A}_{\mathcal{O}}^\vee : i\mathcal{A}_{L,F}^\vee]^{-1} \sum_{L'\in\mathcal{L}(L)} (-1)^{a_{L'}} \sum_{\lambda\in\Lambda_{\mathcal{O},ell}^{L'}/(i\mathcal{A}_{L,F}^\vee + i\mathcal{A}_{L'}^*)} |R^{L'}(\tau_\lambda)| 2^{a_{L'}-a_L}$$

$$\int_{i\mathcal{A}_{L',F}^*} J_{L'}^G(Ind_{L'\cap Q}^{L'}(\tau_{\lambda+\mu}, \zeta_{\lambda,\rho}), f)d\mu,$$

ce qui est l'égalité de l'énoncé. □

6.10 Preuve du théorème 6.1

Les lemmes 6.4 et 6.9 prouvent que $I_N(\theta_\rho, f)$ a une limite quand N tend vers l'infini et ils calculent cette limite. En intervertissant les sommations sur L et L', on a

$$(1) \qquad lim_{N\to\infty} I_N(\theta_\rho, f) = \sum_{L'\in\mathcal{L}(M_{min})} (-1)^{a_{L'}} |W^G|^{-1} X(L'),$$

où

$$X(L') = \sum_{L\in\mathcal{L}^{L'}(M_{min})} |W^L| \sum_{\mathcal{O}\in\{\Pi_2(L)\}_f; m(\mathcal{O},\rho)=1} [i\mathcal{A}_{\mathcal{O}}^\vee : i\mathcal{A}_{L,F}^\vee]^{-1} \sum_{\lambda\in\Lambda_{\mathcal{O},ell}^{L'}/(i\mathcal{A}_{L,F}^\vee + i\mathcal{A}_{L'}^*)}$$

$$|R^{L'}(\tau_\lambda)| 2^{a_{L'}-a_L} \sum_{\zeta\in R^{L'}(\tau_\lambda)^\vee; m(Ind_{L'\cap Q}^{L'}(\tau_\lambda,\zeta),\rho)=1} \int_{i\mathcal{A}_{L',F}^*} J_{L'}^G(Ind_{L'\cap Q}^{L'}(\tau_{\lambda+\mu}, \zeta), f)d\mu.$$

Fixons L'. Dans la formule ci-dessus, on peut remplacer la somme sur $\mathcal{O} \in \{\Pi_2(L)\}_f$ tel que $m(\mathcal{O}, \rho) = 1$ par une somme sur $\mathcal{O} \in \{\Pi_2(L)\}$ tout entier. En effet, si $\mathcal{O} \in \{\Pi_2(L)\}$ vérifie $m(\mathcal{O}, \rho) = 0$, la somme en ζ est vide d'après les propositions 5.2 et 5.7. Si $\mathcal{O} \notin \{\Pi_2(L)\}_f$, les fonctions $J_{L'}^G(Ind_{L'\cap Q}^{L'}(\tau_{\lambda+\mu}, \zeta), f)$ sont nulles. Considérons l'ensemble $\mathcal{Z}$ des quadruplets $z = (L, \mathcal{O}, \lambda, \zeta)$ tels que $L \in \mathcal{L}^{L'}(M_{min})$, $\mathcal{O} \in \{\Pi_2(L)\}$, $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{O},ell}^{L'}/(i\mathcal{A}_{L,F}^\vee + i\mathcal{A}_{L'}^*)$ et $\zeta \in R^{L'}(\tau_\lambda)^\vee$. L'application

$$\iota : z = (L, \mathcal{O}, \lambda, \zeta) \mapsto \{(Ind_{L'\cap Q}^{L'}(\tau_\lambda, \zeta))_\mu; \mu \in i\mathcal{A}_{L'}^*\}$$

est une surjection de $\mathcal{Z}$ sur $\{\Pi_{ell}(L')\}$. Notons $\mathcal{Z}_\rho$ le sous-ensemble des $(L,\mathcal{O},\lambda,\zeta)$ tels que $m(Ind_{L'\cap Q}^{L'}(\tau_\lambda,\zeta),\rho)=1$. Alors $\mathcal{Z}_\rho$ est l'image réciproque par ι du sous-ensemble des $\mathcal{O}'\in\{\Pi_{ell}(L')\}$ tels que $m(\mathcal{O}',\rho)=1$. On a donc

$$(2)\qquad X(L')=\sum_{\mathcal{O}'\in\{\Pi_{ell}(L')\};m(\mathcal{O}',\rho)=1}c(\mathcal{O}')\int_{i\mathcal{A}^*_{L',F}}J^G_{L'}(\pi'_\mu,f)d\mu,$$

où, pour tout $\mathcal{O}'$, on a fixé un élément $\pi'\in\mathcal{O}'$, et

$$c(\mathcal{O}')=\sum_{z=(L,\mathcal{O},\lambda,\zeta)\in\mathcal{Z};\iota(z)=\mathcal{O}'}|W^L|[i\mathcal{A}^\vee_{\mathcal{O}}:i\mathcal{A}^\vee_{L,F}]^{-1}|R^{L'}(\tau_\lambda)|2^{a_{L'}-a_L}.$$

Fixons $\mathcal{O}'$. Notons $\mathcal{Z}'$ l'ensemble des quadruplets $z'=(L,\mathcal{O},\lambda,\zeta)$ tels que $L\in\mathcal{L}^{L'}(M_{min})$, $\mathcal{O}\in\{\Pi_2(L)\}$, $\lambda\in\Lambda^{L'}_{\mathcal{O},ell}/i\mathcal{A}^\vee_{L,F}$ et $\zeta\in R^{L'}(\tau_\lambda)^\vee$, qui vérifient l'égalité $\pi'=Ind^{L'}_{L'\cap Q}(\tau_\lambda,\zeta)$. Les projections de $\Lambda^{L'}_{\mathcal{O},ell}/i\mathcal{A}^\vee_{L,F}$ sur $\Lambda^{L'}_{\mathcal{O},ell}/(i\mathcal{A}^\vee_{L,F}+i\mathcal{A}^*_{L'})$ induisent une application de $\mathcal{Z}'$ dans $\mathcal{Z}$. Son image est précisément l'ensemble des $z\in\mathcal{Z}$ tels que $\iota(z)=\mathcal{O}'$. Deux éléments de $\mathcal{Z}'$ ont même image par cette application si et seulement s'ils sont de la forme $(L,\mathcal{O},\lambda,\zeta)$, $(L,\mathcal{O},\lambda+\mu,\zeta)$, avec $\mu\in i\mathcal{A}^*_{L'}$. Pour que les deux éléments appartiennent à $\mathcal{Z}'$, il faut et il suffit que $\pi'_\mu=\pi'$, autrement dit $\mu\in i\mathcal{A}^\vee_{\mathcal{O}'}$. La fibre de l'application au-dessus de l'image de nos deux éléments a donc le même nombre d'éléments qu'une orbite par translation par $i\mathcal{A}^\vee_{\mathcal{O}'}$ dans $i\mathcal{A}^*_{L,F}$. Puisque $i\mathcal{A}^\vee_{L,F}\cap i\mathcal{A}^*_{L'}=i\mathcal{A}^\vee_{L',F}$, ce nombre d'éléments est constant, égal à $[i\mathcal{A}^\vee_{\mathcal{O}'}/i\mathcal{A}^\vee_{L',F}]$. On obtient

$$c(\mathcal{O}')=[i\mathcal{A}^\vee_{\mathcal{O}'}/i\mathcal{A}^\vee_{L',F}]^{-1}\sum_{z'=(L,\mathcal{O},\lambda,\zeta)\in\mathcal{Z}'}|W^L|[i\mathcal{A}^\vee_{\mathcal{O}}:i\mathcal{A}^\vee_{L,F}]^{-1}|R^{L'}(\tau_\lambda)|2^{a_{L'}-a_L}.$$

Fixons un élément $z'=(L,\mathcal{O},\lambda,\zeta)\in\mathcal{Z}'$. Considérons un autre élément $\tilde{z}=(\tilde{L},\tilde{\mathcal{O}},\tilde{\lambda},\tilde{\zeta})\in\mathcal{Z}'$. Alors

$$(3)\qquad Ind^{L'}_{L'\cap\tilde{Q}}(\tilde{\tau}_{\tilde{\lambda}},\tilde{\zeta})=\pi'=Ind^{L'}_{L'\cap Q}(\tau_\lambda,\zeta).$$

Donc les induites $Ind^{L'}_{L'\cap\tilde{Q}}(\tilde{\tau}_{\tilde{\lambda}})$ et $Ind^{L'}_{L'\cap Q}(\tau_\lambda)$ ont une composante irréductible commune. D'après un résultat d'Harish-Chandra, il existe $w\in W^{L'}$ tel que $wLw^{-1}=\tilde{L}$, $w\mathcal{O}=\tilde{\mathcal{O}}$ et $w(\tau_\lambda)=\tilde{\tau}_{\tilde{\lambda}}$. D'où les égalités

$$|W^{\tilde{L}}|[i\mathcal{A}^\vee_{\tilde{\mathcal{O}}}:i\mathcal{A}^\vee_{\tilde{L},F}]^{-1}=|W^L|[i\mathcal{A}^\vee_{\mathcal{O}}:i\mathcal{A}^\vee_{L,F}]^{-1},$$

$$|R^{L'}(\tau_\lambda)|=|R^{L'}(\tilde{\tau}_{\tilde{\lambda}})|,\ 2^{a_{L'}-a_L}=2^{a_{L'}-a_{\tilde{L}}}.$$

Ces deux derniers nombres ne sont autres que $r(\pi')$ et $t(\pi')^{-1}$. D'où

$$c(\mathcal{O}')=[i\mathcal{A}^\vee_{\mathcal{O}'}:i\mathcal{A}^\vee_{L',F}]^{-1}|W^L|[i\mathcal{A}^\vee_{\mathcal{O}}:i\mathcal{A}^\vee_{L,F}]^{-1}r(\pi')t(\pi')^{-1}|\mathcal{Z}'|.$$

Inversement, pour $w\in W^{L'}$, définissons $\tilde{L}$, $\tilde{\mathcal{O}}$ par les deux premières égalités précédentes et notons $\Lambda(w)$ l'ensemble des $\tilde{\lambda}\in i\mathcal{A}^*_{\tilde{L},F}$ tels que la troisième soit vérifiée. Pour $\tilde{\lambda}\in\Lambda(w)$, les induites ci-dessus ont les mêmes composantes irréductibles et il existe un unique $\tilde{\zeta}$ tel que (3) soit vérifié. L'ensemble $\mathcal{Z}'$ apparaît comme l'image d'une application d'ensemble de départ

$$\{(w,\tilde{\lambda});w\in W^{L'},\tilde{\lambda}\in\Lambda(w)\}.$$

Tous les ensembles $\Lambda(w)$ ont même nombre d'éléments, qui est égal à $[i\mathcal{A}^\vee_{\tilde{\mathcal{O}}}:i\mathcal{A}^\vee_{\tilde{L},F}]$. D'autre part, deux éléments $(w_1,\tilde{\lambda}_1)$ et $(w_2,\tilde{\lambda}_2)$ ont même image dans $\mathcal{Z}'$ si et seulement si $\tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_2$, $w_1 L w_1^{-1} = w_2 L w_2^{-1}$, $w_1\mathcal{O} = w_2\mathcal{O}$ et $w_1(\tau_\lambda) = w_2(\tau_\lambda)$. Ces dernières conditions sont équivalentes à ce que l'élément$w = w_2^{-1}w_1$ conserve L et ait pour image dans $W^{L'}(L)$ un élément de $W^{L'}(\tau_\lambda)$. Puisque $Ind_{L'\cap Q}^{L'}(\tau_\lambda)$ a une composante elliptique, ce dernier groupe n'est autre que $R^{L'}(\tau_\lambda)$. Autrement dit, les fibres de l'application précédente ont pour nombre d'éléments

$$|W^L||R^{L'}(\tau_\lambda)| = r(\pi')|W^L|.$$

Donc

$$|\mathcal{Z}'| = |W^{L'}||W^L|^{-1}[i\mathcal{A}^\vee_{\tilde{\mathcal{O}}} : i\mathcal{A}^\vee_{\tilde{L},F}]r(\pi')^{-1},$$

puis

$$c(\mathcal{O}') = [i\mathcal{A}^\vee_{\mathcal{O}'} : i\mathcal{A}^\vee_{L',F}]^{-1}|W^{L'}|t(\pi')^{-1}.$$

En reportant cette valeur dans (2) puis (1), on obtient l'égalité du théorème. $\square$

7 Une formule intégrale calculant la multiplicité ; application

7.1 Le théorème principal

Soient (V, q_V) et (W, q_W) deux espaces quadratiques compatibles. On plonge le plus petit dans le plus grand comme en 4.2 et on utilise les notations de ce paragraphe. Soient $\pi \in Temp(G)$ et $\rho \in Temp(H)$. On a défini le nombre $m(\rho, \pi)$. Supposons $d_V > d_W$. On définit un autre nombre $m_{geom}(\rho, \pi)$ comme en [W1] 13.1, c'est-à-dire par l'égalité

$$m_{geom}(\rho, \pi) = \sum_{T\in\mathcal{T}} |W(H,T)|^{-1} \int_{T(F)} c_{\check{\rho}}(t)c_\pi(t)D^H(t)\Delta(t)^r dt.$$

Les ingrédients de cette formule ont été définis en [W1] 7.3. Le terme $\nu(T)$ de [W1] 13.1 disparaît car nous utilisons ici la mesure sur T définie en 1.2. On a mis un $\check{\rho}$ dans la formule parce que c'est le terme qui intervient naturellement mais c'est inessentiel car

(1) on a les égalités $m(\check{\rho}, \check{\pi}) = m(\rho, \pi) = m(\check{\rho}, \pi) = m(\rho, \check{\pi})$ et $m_{geom}(\check{\rho}, \check{\pi}) = m_{geom}(\rho, \pi) = m_{geom}(\check{\rho}, \pi) = m_{geom}(\rho, \check{\pi})$.

En effet, choisissons un élément γ du groupe orthogonal de W tel que $det(\gamma) = -1$. On définit la représentation ρ^γ par $\rho^\gamma(h) = \rho(\gamma h\gamma^{-1})$. Il est bien connu que ρ^γ est équivalente à $\check{\rho}$. En particulier, si d_W est impair, on peut choisir pour γ la multiplication par -1. Cet élément commute à H et on obtient $\check{\rho} = \rho$. Les mêmes propriétés valent pour π. Puisque l'un des deux nombres d_V ou d_W est impair, on voit qu'il suffit de prouver les deux premières égalités de chaque série. Soit γ comme ci-dessus. On peut considérer γ comme un élément du groupe orthogonal de V qui agit par l'identité sur l'orthogonal de W dans V. On a aussi $\check{\pi} \simeq \pi^\gamma$. On vérifie que $Hom_{H,\xi}(\pi^\gamma, \rho^\gamma) = Hom_{H,\xi}(\pi, \rho)$, d'où la première égalité. L'ensemble $\mathcal{T}$ est un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $H(F)$ dans un ensemble de tores $\underline{\mathcal{T}}$. Ce dernier est stable par conjugaison par γ. Pour démontrer la seconde égalité, il suffit de prouver que, pour $T \in \underline{\mathcal{T}}$ et pour un élément $t \in T(F)$ en position générale, on a l'égalité $c_{\rho^\gamma}(t) = c_\rho(\gamma t\gamma^{-1})$ et une égalité similaire pour la représentation π. Le terme $c_\rho(t)$ est le coefficient associé à une certaine orbite, notons-la ici $\mathcal{O}^t \in Nil(\mathfrak{h}_t)$ dans le développement du caractère θ_ρ au voisinage de t. La relation à prouver est immédiate, pourvu que l'image par la conjugaison par γ de $\mathcal{O}^t$

soit égale à $\mathcal{O}^{\gamma t\gamma^{-1}}$. On le vérifie sur la définition de ces orbites, cf. [W1] 7.3. En fait, l'argument implicite est que ces orbites sont régulières et que toute orbite nilpotente régulière de l'algèbre de Lie d'un groupe spécial orthogonal est conservée par le groupe orthogonal tout entier.

Si maintenant $d_W > d_V$, on pose $m_{geom}(\rho,\pi) = m_{geom}(\pi,\rho)$.

Théorème. *Pour tout $\pi \in Temp(G)$ et tout $\rho \in Temp(H)$, on a l'égalité $m(\rho,\pi) = m_{geom}(\rho,\pi)$.*

La preuve sera donnée dans les paragraphes 7.7 à 7.9.

7.2 Multiplicités géométriques pour les quasi-caractères et induction

Soient (V, q_V) et (W, q_W) deux espaces quadratiques compatibles. Soient $\rho \in Temp(H)$ et θ un quasi-caractère de $G(F)$. Supposons d'abord $d_V > d_W$. On pose

$$m_{geom}(\rho,\theta) = m_{geom}(\theta,\rho) = \sum_{T\in\mathcal{T}} |W(H,T)|^{-1} \int_{T(F)} c_{\check{\rho}}(t) c_\theta(t) D^H(t)\Delta(t)^r dt,$$

où c_θ a été défini en [W1] 7.3. Supposons maintenant $d_V < d_W$. On inverse les rôles de V et W en posant $V' = W$, $W' = V$ et en introduisant les objets relatifs au couple (V', W'), que l'on affecte d'un $'$. On pose

$$m_{geom}(\rho,\theta) = m_{geom}(\theta,\rho) = \sum_{T\in\mathcal{T}'} |W(G,T)|^{-1} \int_{T(F)} c'_\theta(t) c'_{\check{\rho}}(t) D^G(t)\Delta(t)^{r'} dt.$$

Remarquons que, pour $\pi \in Temp(G)$, on a $m_{geom}(\rho,\pi) = m_{geom}(\rho,\theta_\pi)$.

Soit $k \geq 1$ un entier, posons $G = GL_k$ et soit θ un quasi-caractère sur $G(F)$. Dans $\mathfrak{g}(F)$, il y a une unique orbite nilpotente régulière, notons-la $\mathcal{O}_{GL_k}$. On pose

$$m_{geom}(\theta) = c_{\theta,\mathcal{O}_{GL_k}}(1).$$

Soient (V, q_V) et (W, q_W) comme ci-dessus et L un Lévi de G. Ecrivons

$$L = GL_{k_1} \times ... \times GL_{k_s} \times \tilde{G},$$

où $\tilde{G}$ est le groupe spécial orthogonal d'un sous-espace quadratique $\tilde{V}$ de V. Soient $\rho \in Temp(H)$, $\tilde{\theta}$ un quasi-caractère sur $\tilde{G}(F)$ et, pour $j = 1, ..., s$, θ_j un quasi-caractère sur $GL_{k_j}(F)$. Posons $\theta^L = \theta_1 \otimes ... \otimes \theta_s \otimes \tilde{\theta}$. Rappelons que les espaces quadratiques $\tilde{V}$ et W sont compatibles. On peut donc poser

$$m_{geom}(\rho,\theta^L) = m_{geom}(\theta_1)...m_{geom}(\theta_s)m_{geom}(\rho,\tilde{\theta}).$$

Remarque. La définition se généralise évidemment à tout quasi-caractère sur $L(F)$ qui est combinaison linéaire de quasi-caractères comme ci-dessus. En fait, elle se généralise à tout quasi-caractère sur $L(F)$, mais nous n'en aurons pas besoin.

On définit le quasi-caractère induit $\theta = Ind_L^G(\theta^L)$.

Lemme. *Sous ces hypothèses, on a l'égalité $m_{geom}(\rho,\theta) = m_{geom}(\rho,\theta^L)$.*

Preuve. Traitons le cas où $d_V > d_W$, le cas opposé étant similaire et en fait plus simple. On suppose d'abord $d_W < d_{\tilde{V}}$. On peut alors supposer $W \subset \tilde{V}$. Considérons les formules qui définissent $m_{geom}(\rho,\theta)$ et $m_{geom}(\rho,\tilde{\theta})$. En se reportant aux définitions de [W1] 7.3, on voit que les ensembles $\mathcal{T}$ qui y interviennent sont les mêmes. Fixons $T \in \mathcal{T}$. Les fonctions $c_{\check{\rho}}$ sont aussi les mêmes, ainsi que les fonctions D^H et Δ. L'entier r qui intervient dans la première formule est changé en $r-k$ dans la seconde. Pour démontrer l'égalité cherchée, il suffit donc de prouver que, pour $t \in T(F)$ en position générale, on a l'égalité

$$(1) \qquad c_\theta(t)\Delta(t)^k = c_{\tilde{\theta}}(t) \prod_{j=1,\dots,s} m_{geom}(\theta_j).$$

Rappelons qu'à T est attaché une décomposition orthogonale $W = W' \oplus W''$. L'espace W' est de dimension paire et T est un sous-tore maximal de $H'(F)$, où H' est le groupe spécial orthogonal de V'. De plus, $A_T = \{1\}$, c'est-à-dire que T ne contient aucun sous-tore déployé non trivial. On note V'' l'orthogonal de W' dans V et G'' son groupe spécial orthogonal. Soit $t \in T(F)$ tel que toutes ses valeurs propres dans V soient distinctes (donc aussi différentes de 1). On a alors $Z_G(t) = T \times G''$. Par définition, on a $c_\theta(t) = c_{\theta,\mathcal{O}}(t)$ pour une certaine orbite nilpotente régulière $\mathcal{O}$ de $\mathfrak{g}_t(F)$. Utilisons le lemme 2.3 pour calculer ce terme.

Montrons que l'ensemble $\mathcal{X}^L(t)$ qui y intervient peut être supposé réduit à $\{t\}$, autrement dit que tout élément de $L(F)$ qui est conjugué à t par un élément de $G(F)$ l'est par un élément de $L(F)$. Soit $g \in G(F)$ tel que $gtg^{-1} \in L(F)$. Alors $g^{-1}A_Lg$ est inclus dans le commutant de t, c'est-à-dire dans $T \times G''$. Sa projection dans T ne peut être que triviale, donc $g^{-1}A_Lg \subset G''$. L'intersection des noyaux des opérateurs $a-1$ de V, pour $a \in A_L(F)$, est égale à $\tilde{V}$. L'inclusion précédente entraîne $W' \subset g^{-1}\tilde{V}$ et $gW' \subset \tilde{V}$. Mais on a aussi $W' \subset W \subset \tilde{V}$. Les sous-espaces quadratiques W' et gW' étant isomorphes, le théorème de Witt entraîne que l'on peut choisir $\tilde{g} \in \tilde{G}(F)$ tel que $W' = \tilde{g}gW'$. Le groupe $\tilde{G}$ étant inclus dans L, cela montre que, quitte à changer g par un élément de sa classe $L(F)g$, on peut supposer $gW' = W'$. Alors g induit des éléments g' et g'' des groupes orthogonaux de W' et W''. Si $g' \in H'(F)$, on peut considérer g' comme un élément de $G(F)$, qui appartient en fait à $L(F)$. Alors $gtg^{-1} = g'tg'^{-1}$ et cet élément est conjugué à t par un élément de $L(F)$. Si $det(g') = -1$, on remarque que l'orthogonal de W' dans $\tilde{V}$ n'est pas nul. Fixons un élément ϵ du groupe orthogonal de cet espace tel que $det(\epsilon) = -1$. Soit g_1 l'élément de $G(F)$ qui agit par g' sur W', par ϵ sur l'orthogonal ci-dessus et par l'identité sur l'orthogonal de $\tilde{V}$ dans V. On a encore $g_1 \in L(F)$ et $gtg^{-1} = g_1tg_1^{-1}$, ce qui démontre l'assertion.

Pour l'unique élément t de $\mathcal{X}^L(t)$, l'ensemble $\Gamma_t/G_t(F)$ du lemme 2.3 est réduit à $\{1\}$ puisque $\Gamma_t = Z_G(t)(F)$ et $Z_G(t)$ est connexe. Le groupe $Z_L(t)$ est lui-aussi connexe et le lemme 2.3 se réduit donc à l'égalité

$$(2) \qquad c_\theta(t) = c_{\theta,\mathcal{O}}(t) = D^G(t)^{-1/2}D^L(t)^{1/2}c_{\theta^L,\mathcal{O}^L}(t),$$

où $\mathcal{O}^L$ est l'unique élément de $Nil(\mathfrak{l})$ tel que $[\mathcal{O} : \mathcal{O}^L] = 1$. Pour calculer les deux premiers facteurs, on peut passer à la clôture algébrique et supposer T inclus dans un tore maximal A_0 de G. Le rapport $D^G(t)D^L(t)^{-1}$ est la valeur absolue du produit des $\alpha(t)-1$ sur les racines α de A_0 dans G qui ne sont pas dans L et qui sont telles que $\alpha(t) \neq 1$. Notons $t_1,\dots,t_n,t_n^{-1},\dots,t_1^{-1}$ les valeurs propres de t dans W'. La description habituelle des racines montre que le produit ci-dessus est égal à

$$(\prod_{i=1,\ldots,n}(t_i-1)(t_i^{-1}-1))^{2k}.$$

En comparant avec la définition de la fonction Δ, on obtient

$$(3)\qquad D^G(t)^{-1/2}D^L(t)^{1/2}=\Delta(t)^{-k}.$$

Supposons d_V impair ou $d_V=2$. Alors $\mathcal{O}$ est l'unique orbite nilpotente régulière. L'orbite $\mathcal{O}^L$ est aussi l'unique orbite nilpotente régulière. Elle se décompose en la somme des uniques orbites nilpotentes régulières $\mathcal{O}_{GL_{k_j}}$ des $\mathfrak{gl}_{k_j}(F)$ et de l'unique orbite régulière $\tilde{\mathcal{O}}$ de $\tilde{\mathfrak{g}}(F)$. On a l'égalité

$$(4)\qquad c_{\theta^L,\mathcal{O}^L}(t)=c_{\tilde{\theta},\tilde{\mathcal{O}}}(t)\prod_{j=1,\ldots,s}c_{\theta_j,\mathcal{O}_{GL_{k_j}}}(1).$$

Le terme $c_{\tilde{\theta},\tilde{\mathcal{O}}}(t)$ n'est autre que $c_{\tilde{\theta}}(t)$ tandis que les termes $c_{\theta_j,\mathcal{O}_{GL_{k_j}}}(1)$ ne sont autres que $m_{geom}(\theta_j)$. Alors l'égalité (2) devient l'égalité (1) cherchée. Supposons d_V pair et $d_V\geq 4$. Alors $\mathcal{O}$ est l'orbite paramétrée en [W1] 7.1 par ν_0, où $x\mapsto \nu_0x^2$ est le noyau anisotrope de l'orthogonal de W dans V. Quand on remplace V par $\tilde{V}$, ce ν_0 ne change pas. On vérifie sur la définition des paramétrages que $\mathcal{O}^L$ est somme des $\mathcal{O}_{GL_{k_j}}$ et, ou bien de l'orbite $\tilde{\mathcal{O}}$ paramétrée par ν_0 si $d_{\tilde{V}}\geq 4$, ou bien de l'unique orbite régulière $\tilde{\mathcal{O}}$ si $d_{\tilde{V}}\leq 2$. On conclut comme précédemment.

On suppose maintenant que $d_{\tilde{V}}<d_W$. On peut supposer $\tilde{V}\subset W$. La formule de définition de $m_{geom}(\rho,\theta)$ s'écrit encore

$$m_{geom}(\rho,\theta)=\sum_{T\in\mathcal{T}}m_T(\rho,\theta),$$

où

$$m_T(\rho,\theta)=|W(H,T)|^{-1}\int_{T(F)}c_{\check{\rho}}(t)c_\theta(t)D^H(t)\Delta(t)^r dt.$$

Dans celle qui définit $m_{geom}(\rho,\tilde{\theta})$, on se rappelle qu'il faut inverser les rôles de H et $\tilde{G}$ puisque $d_{\tilde{V}}<d_W$. D'où

$$m_{geom}(\rho,\tilde{\theta})=\sum_{T\in\tilde{\mathcal{T}}}m_T(\rho,\tilde{\theta}),$$

où

$$m_T(\rho,\tilde{\theta})=|W(\tilde{G},T)|^{-1}\int_{T(F)}\tilde{c}_{\check{\rho}}(t)c_{\tilde{\theta}}(t)D^{\tilde{G}}(t)\Delta(t)^{\tilde{r}}dt.$$

L'ensemble $\mathcal{T}$ est un ensemble de représentants de classes de conjugaison par $H(F)$ dans un ensemble de tores $\underline{\mathcal{T}}$. De même, $\tilde{\mathcal{T}}$ est ensemble de représentants de classes de conjugaison par $\tilde{G}(F)$ dans un ensemble de tores $\underline{\tilde{\mathcal{T}}}$. Montrons que

(5) $\underline{\tilde{\mathcal{T}}}$ est l'ensemble des $T\in\underline{\mathcal{T}}$ qui sont inclus dans $\tilde{G}$.

Soit T un élément de l'un ou l'autre de ces ensembles. On a une décomposition orthogonale $\tilde{V}=\tilde{V}'\oplus\tilde{V}''$ où $d_{\tilde{V}'}$ est paire et T est inclus dans le groupe spécial orthogonal $\tilde{G}'$ de $\tilde{V}'$. De plus $A_T=\{1\}$. Notons W'', resp. V'', l'orthogonal de $\tilde{V}'$ dans W, resp. V. Supposons d_V pair. Alors T appartient au deuxième ensemble si et seulement si $d_{an,W''}=1$. Puisque d_W est impair, T appartient au premier ensemble si et seulement si

$d_{an,W''}=1$. Ces conditions sont les mêmes. Supposons d_V impair. Alors T appartient au deuxième ensemble si et seulement si $d_{an,V''}=1$. Il appartient au premier si et seulement si $d_{an,\tilde{V}''}=1$. Mais V'' est la somme orthogonale de $\tilde{V}''$ et de l'orthogonal de $\tilde{V}$ dans V. Ce dernier espace est hyperbolique. Donc $d_{an,V''}=d_{an,\tilde{V}''}$ et nos deux conditions sont encore équivalentes.

Soit $T\in\mathcal{T}$. Montrons que

(6) si T n'est pas conjugué à un élément de $\underline{\tilde{\mathcal{T}}}$ par un élément de $H(F)$, on a $m_T(\rho,\theta)=0$.

Notons $W=W'\oplus W''$ la décomposition attachée à T et soit $t\in T(F)$ en position générale. Comme dans la première partie de la preuve, $c_\theta(t)$ se calcule grâce au lemme 2.3. Pour que ce terme soit non nul, il faut qu'il existe $g\in G(F)$ tel que $gtg^{-1}\in L(F)$. Comme plus haut, cette relation entraîne $gW'\subset\tilde{V}$, donc $gW'\subset W$. Notons W''_1 l'orthogonal de gW' dans W. Remarquons qu'il n'est pas nul puisque $d_{\tilde{V}}<d_W$. Les deux sous-espaces quadratiques gW' et W' de W sont isomorphes. Donc leurs orthogonaux W''_1 et W'' le sont aussi. Fixons un isomorphisme γ de W'' sur W''_1. Notons h l'automorphisme de W qui agit par g sur W' et par γ sur W''. C'est un élément du groupe orthogonal de W. Quitte à multiplier γ à gauche par un élément du groupe orthogonal de W''_1 de déterminant -1 (un tel élément existe puisque W''_1 n'est pas nul), on peut supposer $h\in H(F)$. La décomposition associée à hTh^{-1} est $gW'\oplus W''_1$. Puisque gW' est inclus dans $\tilde{V}$, hTh^{-1} appartient à $\underline{\tilde{\mathcal{T}}}$ contrairement à l'hypothèse. Cette contradiction montre que la fonction c_θ est nulle en un point général de $T(F)$. D'où la conclusion.

Introduisons dans $\underline{\tilde{\mathcal{T}}}$ une nouvelle relation d'équivalence : deux éléments sont H-équivalents si et seulement s'ils sont conjugués par un élément de $H(F)$. Fixons un ensemble de représentants $\mathcal{T}^\sharp$ des classes de H-équivalence. On peut supposer $\mathcal{T}^\sharp\subset\tilde{\mathcal{T}}$. Les relations (5) et (6) montrent que, dans la formule exprimant $m_{geom}(\rho,\theta)$, on peut remplacer la somme sur $T\in\mathcal{T}$ par la somme sur $T\in\mathcal{T}^\sharp$. Fixons $T\in\mathcal{T}^\sharp$. Notons $\tilde{\mathcal{T}}_T$ l'ensemble des éléments de $\tilde{\mathcal{T}}$ qui sont H-équivalents à T. Il suffit de prouver que l'on a l'égalité

$$(7)\qquad m_T(\rho,\theta)=\sum_{\tilde{T}\in\tilde{\mathcal{T}}_T}m_{\tilde{T}}(\rho,\tilde{\theta})\prod_{j=1,\dots,s}m_{geom}(\theta_i).$$

On note $\tilde{V}=\tilde{V}'\oplus\tilde{V}''$ la décomposition attachée à T, W'' l'orthogonal de $\tilde{V}'$ dans W, $\tilde{G}'$, $\tilde{G}''$ et H'' les groupes spéciaux orthogonaux de $\tilde{V}'$, $\tilde{V}''$ et W''. Pour tout groupe spécial orthogonal, par exemple G, on note G^+ le groupe orthogonal correspondant. On sépare trois cas. Le cas (I) est celui où $\tilde{V}'=\{0\}$ ou $\tilde{V}''\neq\{0\}$. Le cas (II) est celui où $\tilde{V}'\neq\{0\}$, $\tilde{V}''=\{0\}$ et il existe un élément $\gamma'\in Norm_{\tilde{G}^+(F)}(T)$ de déterminant -1. Le cas (III) est celui où $\tilde{V}'\neq\{0\}$, $\tilde{V}''=\{0\}$ et il n'existe pas de tel élément γ'. Dans les cas (II) et (III), on définit un élément γ de la façon suivante. On fixe un élément γ' de $\tilde{G}^+(F)$ de déterminant -1. Dans le cas (II), on suppose que γ' appartient à $Norm_{\tilde{G}^+(F)}(T)$. On fixe un élément γ'' de déterminant -1 de $H''^+(F)$ et on note γ l'élément de $H(F)$ qui agit par γ' sur $\tilde{V}$ et par γ'' sur W''. Montrons que

(8)(i) dans le cas (I), $\tilde{\mathcal{T}}_T$ est réduit à $\{T\}$ et on a $|W(H,T)|=|W(\tilde{G},T)|$;

(8)(ii) dans le cas (II), $\tilde{\mathcal{T}}_T$ est réduit à $\{T\}$ et on a $|W(H,T)|=2|W(\tilde{G},T)|$;

(8)(iii) dans le cas (III), $\tilde{\mathcal{T}}_T$ est réduit à deux éléments et on peut supposer que $\tilde{\mathcal{T}}_T=\{T,\gamma T\gamma^{-1}\}$; on a $|W(H,T)|=|W(\tilde{G},T)|=|W(\tilde{G},\gamma T\gamma^{-1})|$.

Notons W_1 l'orthogonal de $\tilde{V}$ dans W, H_1 son groupe spécial orthogonal et posons $\Gamma=(\tilde{G}^+\times H_1^+)\cap H$. Décrivons l'ensemble des éléments de $\underline{\tilde{\mathcal{T}}}$ qui sont H-équivalents à T. Ce sont les éléments de cet ensemble qui sont de la forme hTh^{-1} pour un $h\in H(F)$.

La même preuve qu'en (6) montre que l'on peut supposer que h conserve $\tilde{V}$. Autrement dit $h \in \Gamma(F)$. Inversement, si $h \in \Gamma(F)$, hTh^{-1} appartient à notre ensemble de tores. L'application $h \mapsto hTh^{-1}$ se descend donc en une bijection de

$$\Gamma(F)/(\Gamma(F) \cap Norm_{H(F)}(T))$$

sur cet ensemble de tores. L'ensemble $\tilde{\mathcal{T}}_T$ est un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $\tilde{G}(F)$ dans l'ensemble précédent. Il est donc en bijection avec

$$\tilde{G}(F)\backslash\Gamma(F)/(\Gamma(F) \cap Norm_{H(F)}(T)).$$

Si $\tilde{V}' = \{0\}$, $T = \{1\}$ et les assertions de (8)(i) sont évidentes. Supposons $\tilde{V}' \neq \{0\}$. L'ensemble Γ a deux composantes connexes. Sa composante neutre est $\tilde{G} \times H_1$, qui est inclus dans $\tilde{G}Norm_H(T)$ car H_1 est inclus dans $Norm_H(T)$ (et même dans $Z_H(T)$). L'ensemble ci-dessus a donc un élément si $Norm_{H(F)}(T)$ coupe les deux composantes de Γ, et deux éléments sinon. On a $\Gamma(F) \cap Norm_{H(F)}(T) = (Norm_{\tilde{G}^+(F)}(T) \times H_1^+(F)) \cap H(F)$. Donc $Norm_{H(F)}(T)$ coupe les deux composantes de Γ si et seulement si $Norm_{\tilde{G}^+(F)}(T)$ coupe les deux composantes de $\tilde{G}^+$. Si $\tilde{V}'' \neq \{0\}$, cette propriété est vérifiée puisque $\tilde{G}''^+(F) \subset Norm_{\tilde{G}^+(F)}(T)$. Elle l'est aussi dans le cas (II) par définition de l'élément γ' tandis qu'elle ne l'est pas dans le cas (III) par définition de ce cas. Remarquons que, dans ce cas (III), l'élément γ que l'on a défini appartient à $\Gamma(F)$ et pas à sa composante neutre. On en déduit les premières assertions de (8).

Soit $h \in Norm_{H(F)}(T)$. Nécessairement, h conserve $\tilde{V}'$. Comme dans la preuve de (6), on montre qu'en le multipliant à droite par un élément de $H''(F)$ (ce groupe est inclus dans $Z_{H(F)}(T)$), on peut supposer que h conserve $\tilde{V}$, donc appartient à $\Gamma(F) \cap Norm_{H(F)}(T)$. Le quotient $W(H,T)$ est donc égal à

$$(\Gamma(F) \cap Norm_{H(F)}(T))/(\Gamma(F) \cap Z_{H(F)}(T)).$$

Posons

$$\Delta = (\Gamma_F \cap Norm_{H(F)}(T))/\left((\Gamma(F) \cap Z_{H(F)}(T))(\Gamma^0(F) \cap Norm_{H(F)}(T))\right).$$

Il y a un homomorphisme surjectif de $W(H,T)$ sur Δ, de noyau égal à

$$(\Gamma^0(F) \cap Norm_{H(F)}(T))/(\Gamma^0(F) \cap Z_{H(F)}(T)).$$

Mais H_1 est contenu dans $Z_H(T)$, donc ce quotient n'est autre que $Norm_{\tilde{G}(F)}(T)/Z_{\tilde{G}(F)}(T)$, autrement dit $W(\tilde{G},T)$. On obtient que $|W(H,T)|$ est égal à $|W(\tilde{G},T)||\Delta|$. Si $\tilde{V}'' \neq \{0\}$, $Z_{H(F)}(T)$ coupe les deux composantes de Γ car $\tilde{G}''^+$ centralise T. Donc le groupe Δ n'a qu'un élément. Dans le cas (II), $Norm_{H(F)}(T)$ coupe les deux composantes de Γ tandis que $Z_H(T) = T \times H''$ est inclus dans la composante neutre. Alors Δ a deux éléments. Dans le cas (III), $Norm_{H(F)}(T)$ est inclus dans la composante neutre de Γ et Δ n'a qu'un élément. D'où les dernières assertions de (8).

Soit $t \in T(F)$ dont toutes les valeurs propres dans $\tilde{V}$ soient distinctes. Comme dans la première partie de la preuve, on a $c_\theta(t) = c_{\theta,\mathcal{O}}(t)$ pour une certaine orbite nilpotente régulière $\mathcal{O}$ de $\mathfrak{g}_t(F)$. On calcule ce terme en utilisant le lemme 2.3. Montrons que

(9) on peut choisir pour ensemble $\mathcal{X}^L(t)$ l'ensemble $\{t\}$ dans le cas (I) et l'ensemble $\{t, \gamma t\gamma^{-1}\}$ dans les cas (II) et (III).

C'est clair si $T = \{1\}$. Supposons $t \neq \{1\}$, ce qui équivaut à $\tilde{V}' \neq \{0\}$. Soit $g \in G(F)$ tel que $gtg^{-1} \in L(F)$. Comme dans la première partie de la preuve, cela entraîne $g\tilde{V}' \subset \tilde{V}$.

Quitte à multiplier g à droite par un élément de $\tilde{G}(F)$, on peut supposer que g conserve $\tilde{V}'$. Notons g' la restriction de g à $\tilde{V}'$. Si $\tilde{V}'' \neq \{0\}$, soit g'' un élément de $\tilde{G}''^{+}(F)$ tel que $det(g')det(g'') = 1$. Soit g_1 l'élément de $G(F)$ qui agit par g' sur $\tilde{V}'$, par g'' sur $\tilde{V}''$ et par l'identité sur l'orthogonal de $\tilde{V}$ dans V. Alors $gtg^{-1} = g_1tg_1^{-1}$ et g_1 appartient à $L(F)$. D'où le résultat. Supposons maintenant $\tilde{V}'' = \{0\}$. Si $g' \in \tilde{G}'(F)$, la même construction s'applique et gtg^{-1} est conjugué à t par un élément de $L(F)$. Si $det(g') = -1$, on construit de même un élément $g_1 \in L(F)$ qui agit sur $\tilde{V}'$ par $\gamma' g'^{-1}$. Alors $g_1gtg^{-1}g_1^{-1} = \gamma t\gamma^{-1}$. On peut donc supposer que $\mathcal{X}^L(t)$ est inclus dans $\{t, \gamma t\gamma^{-1}\}$. D'autre part, les deux éléments de cet ensemble ne sont pas conjugués par un élément de $L(F)$. Sinon, il existerait $\tilde{g} \in \tilde{G}(F) = \tilde{G}'(F)$ tel que $\tilde{g}t\tilde{g}^{-1} = \gamma' t\gamma'^{-1}$ et $\tilde{g}^{-1}\gamma'$ serait un élément de $\tilde{G}'^{+}(F)$ de déterminant -1 et commutant à T. Un tel élément n'existe pas, d'où l'assertion et (9).

Achevons la preuve en supposant que l'on est dans le cas (II) et en laissant les autres cas au lecteur. L'ensemble $\Gamma_t/G_t(F)$ du lemme 2.3 est réduit à $\{1\}$ et l'ensemble $\Gamma_{\gamma t\gamma^{-1}}/G_t(F)$ est réduit à la classe de γ. Les groupes $Z_L(t)$ et $Z_L(\gamma t\gamma^{-1})$ sont connexes. De plus $\gamma\mathcal{O} = \mathcal{O}$. Le lemme 2.3 entraîne

$$c_\theta(t) = c_{\theta,\mathcal{O}}(t) = D^G(t)^{-1/2}(D^L(t)^{1/2}c_{\theta^L,\mathcal{O}^L}(t) + D^L(\gamma t\gamma^{-1})^{1/2}c_{\theta^L,\mathcal{O}^L}(\gamma t\gamma^{-1})),$$

où $\mathcal{O}^L$ est l'unique orbite nilpotente de $\mathfrak{l}_t(F) = \mathfrak{l}_{\gamma t\gamma^{-1}}(F)$ telle que $[\mathcal{O} : \mathcal{O}^L] = 1$. D'où

$$m_T(\rho,\theta) = |W(H,T)|^{-1}(\int_{T(F)} c_{\check{\rho}}(t)c_{\theta^L,\mathcal{O}^L}(t)D^G(t)^{-1/2}D^L(t)^{1/2}D^H(t)\Delta(t)^r dt$$

$$+ \int_{T(F)} c_{\check{\rho}}(t)c_{\theta^L,\mathcal{O}^L}(\gamma t\gamma^{-1})D^G(t)^{-1/2}D^L(\gamma t\gamma^{-1})^{1/2}D^H(t)\Delta(t)^r dt).$$

Dans la seconde intégrale, on effectue le changement de variables $t \mapsto \gamma^{-1}t\gamma$. Il laisse invariantes les fonctions $c_{\check{\rho}}$, D^G, D^H et Δ. La seconde intégrale est donc égale à la première. Grâce à (8)(ii), on obtient

$$(10) \qquad m_T(\rho,\theta) = |W(\tilde{G},T)|^{-1}\int_{T(F)} c_{\check{\rho}}(t)c_{\theta^L,\mathcal{O}^L}(t)D^G(t)^{-1/2}D^L(t)^{1/2}D^H(t)\Delta(t)^r dt.$$

Soit t comme précédemment. On a encore l'égalité (4) et $c_{\theta_j,\mathcal{O}_{GL_{k_j}}}(1) = m_{geom}(\theta_j)$ pour tout j. On vérifie que $\tilde{\mathcal{O}}$ est précisément l'orbite qui sert à définir $c_{\tilde{\theta}}(t)$. Traitons seulement le cas le plus subtil où d_V est pair et $d_{\tilde{V}} \geq 4$. D'après [W1] 7.3, $\mathcal{O}$ est l'orbite paramétrée par ν_0, où la forme $x \mapsto \nu_0 x^2$ est le noyau anisotrope de l'orthogonal de W dans V. L'orbite servant à définir $c_{\tilde{\theta}}(t)$ est paramétrée par $-\tilde{\nu}_0$, où $x \mapsto \tilde{\nu}_0 x^2$ est le noyau anisotrope de l'orthogonal de $\tilde{V}$ dans W. L'orbite $\tilde{\mathcal{O}}$ est, comme $\mathcal{O}$, paramétrée par ν_0. Or $\nu_0 = -\tilde{\nu}_0$ (dans $F^\times/F^{\times 2}$) car l'orthogonal de $\tilde{V}$ dans V est hyperbolique. D'où l'assertion. On obtient

$$c_{\theta^L,\mathcal{O}^L}(t) = c_{\tilde{\theta}}(t)\prod_{j=1,\dots,s} m_{geom}(\theta_j).$$

Un calcul analogue montre que $c_{\check{\rho}}(t) = \tilde{c}_{\check{\rho}}(t)$. On a encore l'égalité (3). Comme dans la preuve de cette égalité, on vérifie que

$$D^{\tilde{G}}(t) = D^{\tilde{G}'}(t)\Delta(t)^{d_{\tilde{V}} - d_{\tilde{V}'}}$$

et

$$D^H(t) = D^{\tilde{G}'}(t)\Delta(t)^{d_W - d_{\tilde{V}'}}.$$

D'où
$$D^G(t)^{-1/2}D^L(t)^{1/2}D^H(t)\Delta(t)^r = D^{\tilde{G}}(t)\Delta(t)^a,$$
où $a = r - k + d_W - d_{\tilde{V}}$. Par définition, $d_V - d_W = 2r+1$, $d_W - d_{\tilde{V}} = 2\tilde{r}+1$ et $d_V - d_{\tilde{V}} = 2k$. Alors $a = \tilde{r}$. Mais alors, le membre de droite de l'égalité (10) n'est autre que $m_T(\rho, \tilde{\theta})\prod_{j=1,\dots,s} m_{geom}(\theta_j)$. Grâce à (8)(ii), on obtient l'égalité (5), ce qui achève la démonstration. □

7.3 Fonctions cuspidales sur les groupes spéciaux orthogonaux

Soit (V, q_V) un espace quadratique. Rappelons qu'en 2.5, on a associé un quasi-caractère $I\theta_f$ à toute fonction cuspidale $f \in C_c^\infty(G(F))$.

Lemme. *Soit $f \in C_c^\infty(G(F))$ une fonction cuspidale. On a l'égalité*
$$I\theta_f = \sum_{\pi\in\Pi_{ell}(G)} t(\check{\pi})^{-1}\theta_{\check{\pi}}(f)\theta_\pi.$$

Preuve. Soit $f \in C_c^\infty(G(F))$ une fonction cuspidale. Reprenons la formule 2.5(1). Elle se simplifie puisque $A_G = \{1\}$ et devient
$$I\theta_f = \sum_{\pi\in T_{ell}(G)} c(\pi)\theta_{\check{\pi}}(f)\theta_\pi.$$

Décrivons l'ensemble $T_{ell}(G)$ et les constantes $c(\pi)$. Considérons l'ensemble des couples (L, τ) tels que $L \in \mathcal{L}(M_{min})$, τ est une représentation admissible irréductible de $L(F)$ de la série discrète et $R(\tau) \cap W(L)_{reg} \neq \emptyset$. On définit de façon évidente la notion de conjugaison de tels couples et on fixe un ensemble de représentants $\tilde{T}_{ell}(G)$ des classes de conjugaison. Soit $(L, \tau) \in \tilde{T}_{ell}(G)$. Comme on l'a dit en 4.1, l'ensemble $R(\tau) \cap W(L)_{reg}$ a un unique élément. Notons t cet élément. Pour tout $\zeta \in R(\tau)^\vee$, on définit la représentation elliptique $\pi(\zeta) = Ind_Q^G(\tau, \zeta)$ de $G(F)$, où Q est un élément fixé de $\mathcal{P}(L)$. On définit la représentation virtuelle
$$(1) \qquad \pi = \sum_{\zeta\in R(\tau)^\vee} \zeta(t)\pi(\zeta).$$

Alors $T_{ell}(G)$ est l'ensemble des ces représentations virtuelles quand (L, τ) décrit $\tilde{T}_{ell}(G)$. Le nombre $c(\pi)$ associé à la représentation π ci-dessus est $|R(\tau)|^{-1}|det(t-1)_{|\mathcal{A}_L}|^{-1}$. Rappelons que les représentations tempérées elliptiques de $G(F)$ sont exactement les représentations $\pi(\zeta)$ introduites ci-dessus quand (L, τ) décrit $\tilde{T}_{ell}(G)$ et que l'on a $r(\pi(\zeta)) = r(\pi(\zeta)\check{}) = |R(\tau)|$ et $t(\pi(\zeta)) = t(\pi(\zeta)\check{}) = |det(t-1)_{\mathcal{A}_L}|$. Pour prouver l'égalité de l'énoncé, on peut donc fixer $(L, \tau) \in \tilde{T}_{ell}(G)$ et prouver l'égalité
$$(2) \qquad \sum_{\zeta\in R(\tau)^\vee} \theta_{\pi(\zeta)\check{}}(f)\theta_{\pi(\zeta)} = |R(\tau)|^{-1}\theta_{\check{\pi}}(f)\theta_\pi,$$

où π est définie par (1). Soit $r \in R(\tau)$, $r \neq t$. D'après [A5] proposition 2.1(b), la représentation virtuelle
$$\sum_{\zeta\in R(\tau)^\vee} \zeta(r)\pi(\zeta)\check{}$$

est une somme de représentations proprement induites. Puisque f est cuspidale, le caractère de cette représentation annule f. Cela étant vrai pour tout $r \neq t$, on en déduit que $\zeta(t)\theta_{\pi(\zeta)\check{}}(f)$ est indépendant de ζ. Ce nombre est donc égal à $|R(\tau)|^{-1}\theta_{\check{\pi}}(f)$. Le membre de gauche de la relation (2) est donc égal à

$$|R(\tau)|^{-1} \sum_{\zeta \in R(\tau)^\vee} \theta_{\check{\pi}}(f)\zeta(t)\theta_{\pi(\zeta)}$$

et ceci n'est autre que le membre de droite de (2). Cela démontre (2) et le lemme. □

7.4 Pseudo-coefficients

Soit (V, q_V) un espace quadratique. Soient $L \in \mathcal{L}(M_{min})$ et τ une représentation admissible irréductible de la série discrète de $L(F)$. Supposons $R(\tau) \cap W(L)_{reg} \neq \emptyset$, notons t l'unique élément de cet ensemble . Pour tout $\zeta \in R(\tau)^\vee$, on introduit la représentation elliptique $\pi(\zeta)$ de $G(F)$ comme dans la preuve précédente.

Lemme. *Il existe une fonction cuspidale $f \in C_c^\infty(G(F))$ telle que*
(i) $I\theta_f = \sum_{\zeta \in R(\tau)^\vee} \zeta(t)\theta_{\pi(\zeta)}$;
(ii) $\theta_{\pi(\zeta)\check{}}(f) = \zeta(t)t(\pi(\zeta)\check{})$ pour tout $\zeta \in R(\tau)\check{}$;
(iii) $\theta_{\check{\sigma}}(f) = 0$ pour tout $\sigma \in Temp(G)$ qui n'est pas l'une des représentations $\pi(\zeta)$.

Preuve. On définit $T_{ell}(G)$ et la représentation virtuelle π comme dans la preuve précédente. D'après [A5], p.94, il existe une fonction cuspidale $f \in C_c^\infty(G(F))$ telle que $\theta_{\check{\pi}}(f) = |R(\tau)||det(t-1)_{|\mathcal{A}_L}|$ et $\theta_{\check{\pi}'}(f) = 0$ pour tout $\pi' \in T_{ell}(G)$, $\pi' \neq \pi$. Fixons une telle fonction. Le théorème 5.1 de [A5] affirme précisément que l'égalité du (i) de l'énoncé est vérifiée (le terme $d(\tau)^{-1}$ d'Arthur est égal à $|det(t-1)_{|\mathcal{A}_L}|^{-1}$ et il y a encore un $|R(\tau)|^{-1}$ caché dans la définition de la mesure $d\tau$, cf. [A5] p. 96). Comme dans la preuve précédente, on montre que, pour $\zeta \in R(\tau)^\vee$, on a

$$\theta_{\pi(\zeta)\check{}}(f) = |R(\tau)|^{-1}\zeta(t)\theta_{\check{\pi}}(f).$$

D'où (ii) puisque $t(\pi(\zeta)\check{}) = |det(t-1)_{|\mathcal{A}_L}|$. Soit $\sigma \in Temp(G)$ qui n'est pas l'une des représentations $\pi(\zeta)$. Il existe alors $(L', \tau') \in \tilde{T}_{ell}(G)$ et $\zeta' \in R(\tau')$ de sorte que $\sigma = \pi'(\zeta')$, avec une notation évidente. Comme ci-dessus, et avec des notations analogues, on a

$$\theta_{\check{\sigma}} = |R(\tau')|^{-1}\zeta'(t')\theta_{\check{\pi}'}(f),$$

où π' est un élément de $T_{ell}(G)$ différent de π. Donc $\theta_{\check{\sigma}}(f) = 0$ et le (iii). □

7.5 Une conséquence du théorème

Soient (V, q_V) et (W, q_W) deux espaces quadratiques compatibles. Soient $\rho \in Temp(H)$ et $f \in C_c^\infty(G(F))$ une fonction cuspidale. Posons

$$m_{spec}(\rho, f) = \sum_{\pi \in \Pi_{ell}(G); m(\check{\rho}, \pi)=1} t(\pi)^{-1}\theta_\pi(f).$$

Corollaire. *On suppose vérifié le théorème 7.1 pour nos deux espaces quadratiques. Alors, pour toute fonction cuspidale $f \in C_c^\infty(G(F))$ et toute représentation $\rho \in Temp(H)$, on a l'égalité $m_{geom}(\rho, I\theta_f) = m_{spec}(\rho, f)$.*

Preuve. Supposons $d_V > d_W$, la preuve étant symétrique dans le cas opposé. En changeant π en $\check{\pi}$ dans la définition de $m_{spec}(\rho, f)$ et en utilisant 7.1(1), on a

$$m_{spec}(\rho, f) = \sum_{\pi \in \Pi_{ell}(G)} m(\rho, \pi) t(\check{\pi})^{-1} \theta_{\check{\pi}}(f).$$

Grâce au théorème, c'est aussi

$$m_{spec}(\rho, f) = \sum_{\pi \in \Pi_{ell}(G)} m_{geom}(\rho, \pi) t(\check{\pi})^{-1} \theta_{\check{\pi}}(f)$$

$$= \sum_{T \in \mathcal{T}} |W(H,T)|^{-1} \int_{T(F)} c_{\check{\rho}}(t) Ic_f(t) D^H(t) \Delta(t)^r dt,$$

où

$$Ic_f(t) = \sum_{\pi \in \Pi_{ell}(G)} t(\check{\pi})^{-1} \theta_{\check{\pi}}(f) c_\pi(t).$$

Il suffit de démontrer que, pour tout $T \in \mathcal{T}$ et presque tout $t \in T(F)$, on a l'égalité $c_{I\theta_f}(t) = Ic_f(t)$. Ces deux fonctions se déduisent par la définition de [W1] 7.3 du quasi-caractère $I\theta_f$ pour la première, du quasi-caractère

$$\sum_{\pi \in \Pi_{ell}(G)} t(\check{\pi})^{-1} \theta_{\check{\pi}}(f) \theta_\pi$$

pour la seconde. Ces deux quasi-caractères sont égaux d'après le lemme 7.3. $\square$

7.6 Le cas du groupe linéaire

Soit $k \geq 1$ un entier et $G = GL_k$. Soit $f \in C_c^\infty(G(F))$ une fonction cuspidale. Posons

$$m_{spec}(f) = \sum_{\mathcal{O} \in \{\Pi_{ell}(G)\}} [i\mathcal{A}_{\mathcal{O}}^\vee : i\mathcal{A}_{G,F}^\vee]^{-1} \theta_\pi(f \mathbf{1}_{H_G=0}),$$

où, comme toujours, on a fixé un point-base π dans chaque orbite.

Lemme. *Pour toute fonction cuspidale $f \in C_c^\infty(G(F))$, on a l'égalité $m_{geom}(I\theta_f) = m_{spec}(f)$.*

Preuve. On utilise encore la formule 2.5(1). Pour le groupe GL_k, les R-groupes sont triviaux et les coefficients $c(\mathcal{O})$ sont égaux à $[i\mathcal{A}_{\mathcal{O}}^\vee : i\mathcal{A}_{G,F}^\vee]^{-1}$. On obtient

$$I\theta_f = \sum_{\mathcal{O} \in \{\Pi_{ell}(G)\}} [i\mathcal{A}_{\mathcal{O}}^\vee : i\mathcal{A}_{G,F}^\vee]^{-1} \theta_{\check{\pi}}(f \mathbf{1}_{H_G=0}) \theta_\pi.$$

D'où
$$m_{geom}(I\theta_f)=\sum_{\mathcal{O}\in\{\Pi_{ell}(G)\}}[i\mathcal{A}_{\mathcal{O}}^{\vee}:i\mathcal{A}_{G,F}^{*}]^{-1}\theta_{\check{\pi}}(f\mathbf{1}_{H_G=0})c_{\theta_\pi,\mathcal{O}_{GL_k}}.$$
D'après un résultat de Rodier ([R] théorème p.161 et remarque 2, p.162), pour toute représentation admissible irréductible π de $G(F)$, on a $c_{\theta_\pi,\mathcal{O}_{GL_k}}=1$ si π admet un modèle de Whittaker, 0 sinon. Or les représentations tempérées elliptiques de $GL_k(F)$, qui ne sont autres que les représentations de la série discrète, possèdent toutes un modèle de Whittaker. Les termes $c_{\theta_\pi,\mathcal{O}_{GL_k}}$ intervenant dans le membre de droite de l'égalité ci-dessus sont tous égaux à 1. On peut changer la somme sur π en une somme sur $\check{\pi}$ et ce membre de droite devient $m_{spec}(f)$. $\square$

7.7 Début de la preuve ; le cas où π est induite

On démontre le théorème par récurrence sur $sup(d_V,d_W)$. On suppose désormais fixés deux espaces quadratiques compatibles (V,q_V) et (W,q_W), avec $d_V>d_W$ et on suppose le théorème vérifié pour tout couple d'espaces quadratiques $(V',q_{V'})$, $(W',q_{W'})$ compatibles et tels que $sup(d_{V'},d_{W'})<d_V$. Le cas où V est de dimension 2 et q_V est hyperbolique est immédiat. On exclut ce cas.

Pour $\rho\in Temp(H)$, on prolonge par linéarité les applications $\pi\mapsto m(\rho,\pi)$ et $\pi\mapsto m_{geom}(\rho,\pi)$ à l'espace des combinaisons linéaires finies à coefficients complexes d'éléments de $Temp(G)$.

Lemme. *Soient π une représentation tempérée de $G(F)$ et $\rho\in Temp(H)$. Supposons π proprement induite. Alors on a l'égalité $m(\rho,\pi)=m_{geom}(\rho,\pi)$.*

Preuve. On peut trouver

-un Lévi $L=GL_k\times\tilde{G}$ de G, où $k\geq 1$ et $\tilde{G}$ est le groupe spécial orthogonal d'un sous-espace $\tilde{V}$ de V ;

- un élément $Q\in\mathcal{P}(L)$;

- des représentations admissibles irréductibles et tempérées μ de $GL_k(F)$ et $\tilde{\pi}$ de $\tilde{G}(F)$,

de sorte que $\pi=Ind_Q^G(\mu\otimes\tilde{\pi})$. Si $m(\rho,\tilde{\pi})=0$, on a $m(\rho,\pi')=0$ pour toute composante irréductible π' de π d'après les propositions 5.3 et 5.8. Donc $m(\rho,\pi)=0$. Si $m(\rho,\tilde{\pi})=1$, les mêmes propositions 5.3 et 5.8 et le lemme 5.5 montrent qu'il existe une unique composante irréductible π' de π telle que $m(\rho,\pi')=1$. Donc $m(\rho,\pi)=1$. Dans les deux cas, $m(\rho,\pi)=m(\rho,\tilde{\pi})$. D'autre part, d'après le lemme 7.2 et les définitions, on a l'égalité
$$m_{geom}(\rho,\pi)=m_{geom}(\rho,\tilde{\pi})m_{geom}(\theta_\mu).$$
D'après le même résultat de Rodier que l'on a utilisé en 7.6, on a $m_{geom}(\theta_\mu)=1$ puisque μ est tempérée et irréductible. D'après l'hypothèse de récurrence, on a l'égalité $m(\rho,\tilde{\pi})=m_{geom}(\rho,\tilde{\pi})$. La conclusion s'ensuit. $\square$

7.8 Comparaison de deux limites

On conserve la situation du paragraphe précédent et on reprend les notations du paragraphe 7.5.

Proposition. *Pour toute fonction cuspidale* $f \in C_c^\infty(G(F))$ *et toute représentation* $\rho \in Temp(H)$*, on a l'égalité* $m_{geom}(\rho, I\theta_f) = m_{spec}(\rho, f)$.

Preuve. Les deux membres ne dépendent de f qu'à équivalence près. D'après le lemme 2.7, on peut supposer f très cuspidale. Le théorème 6.1, appliqué à $\check{\rho}$, calcule la limite quand N tend vers l'infini de $I_N(\theta_{\check{\rho}}, f)$. On a noté cette limite $I_{spec}(\theta_{\check{\rho}}, f)$. Mais le théorème 7.8 de [W1], appliqué à $\theta = \theta_{\check{\rho}}$, calcule la même limite. On l'a noté $I(\theta_{\check{\rho}}, f)$. Avec les définitions de 7.2, c'est simplement $m_{geom}(\rho, \theta_f)$. On a donc

$$I_{spec}(\theta_{\check{\rho}}, f) = m_{geom}(\rho, \theta_f).$$

Remarque. Dans [W1], on avait utilisé d'autres mesures. On utilise ici celles que l'on a définies en 1.2. Le quasi-caractère θ_f est normalisé comme en 2.6.

Reprenons la définition de 6.1. On a

$$I_{spec}(\theta_{\check{\rho}}, f) = \sum_{L \in \mathcal{L}(M_{min})} |W^L||W^G|^{-1}(-1)^{a_L} I_{spec,L}(\theta_{\check{\rho}}, f),$$

où

$$I_{spec,L}(\theta_{\check{\rho}}, f) = \sum_{\mathcal{O} \in \{\Pi_{ell}(L)\}; m(\mathcal{O}, \check{\rho})=1} [i\mathcal{A}_{\mathcal{O}}^\vee : i\mathcal{A}_{L,F}^\vee]^{-1} t(\pi)^{-1} \int_{i\mathcal{A}_{L,F}^*} J_L^G(\pi_\lambda, f) d\lambda.$$

D'après la définition de 7.5, on a $I_{spec,G}(\theta_{\check{\rho}}, f) = m_{spec}(\rho, f)$. Soit $L \in \mathcal{L}(M_{min})$, $L \neq G$. Introduisons la fonction $f_L = \phi_L(f)\mathbf{1}_{H_L=0}$. Alors

$$I_{spec,L}(\theta_{\check{\rho}}, f) = \sum_{\mathcal{O} \in \{\Pi_{ell}(L)\}; m(\mathcal{O}, \check{\rho})=1} [i\mathcal{A}_{\mathcal{O}}^\vee : i\mathcal{A}_{L,F}^\vee]^{-1} t(\pi)^{-1} \theta_\pi(f_L).$$

Ecrivons

$$L = GL_{k_1} \times ... \times GL_{k_s} \times \tilde{G}.$$

La fonction f_L est cuspidale d'après le lemme 2.6(i) et l'espace des fonctions cuspidales sur $L(F)$ est le produit tensoriel des espaces des fonctions cuspidales sur chacun des facteurs de $L(F)$. Sur l'espace des fonctions cuspidales sur $\tilde{G}(F)$, on a défini en 7.5 une forme linéaire $f' \mapsto m_{spec}(\rho, f')$. Sur l'espace des fonctions cuspidales sur un facteur $GL_{k_j}(F)$, on a défini en 7.6 une forme linéaire $f' \mapsto m_{spec}(f')$. Notons $f' \mapsto m_{spec}(\rho, f')$ le produit tensoriel des ces formes linéaires. Montrons que

$$(1) \qquad I_{spec,L}(\theta_{\check{\rho}}, f) = m_{spec}(\rho, f_L).$$

On a

$$\{\Pi_{ell}(L)\} = \{\Pi_{ell}(GL_{k_1})\} \times ... \times \{\Pi_{ell}(GL_{k_s})\} \times \Pi_{ell}(\tilde{G}).$$

Pour $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \times ... \times \mathcal{O}_s \times \tilde{\pi} \in \{\Pi_{ell}(L)\}$, on a

$$i\mathcal{A}_{\mathcal{O}}^\vee = i\mathcal{A}_{\mathcal{O}_1}^\vee \oplus ... \oplus i\mathcal{A}_{\mathcal{O}_s}^\vee,$$

$$t(\pi) = t(\tilde{\pi}) \text{ et } m(\mathcal{O}, \check{\rho}) = m(\tilde{\pi}, \check{\rho}).$$

Si f_L est produit tensoriel de fonctions sur chaque facteur, l'égalité (1) est donc quasiment tautologique et le cas général s'en déduit par linéarité.

On définit $m_{geom}(\rho, I\theta_{f_L})$ comme en 7.2. Ce terme est égal à $m_{spec}(\rho, f_L)$: il suffit d'appliquer le lemme 7.6 à chaque facteur GL et le lemme 7.5 aux espaces $\tilde{V}$ et W. C'est loisible d'après l'hypothèse de récurrence. A ce point, nous avons démontré l'égalité

$$(1) \qquad m_{spec}(\rho, f) = m_{geom}(\rho, \theta_f) - \sum_{L \in \mathcal{L}(M_{min}); L \neq G} |W^L||W^G|^{-1}(-1)^{a_L} m_{geom}(\rho, I\theta_{f_L}).$$

Grâce au lemme 2.6(ii), on a l'égalité

$$m_{geom}(\rho, \theta_f) = \sum_{L \in \mathcal{L}(M_{min})} |W^L||W^G|^{-1}(-1)^{a_L} m_{geom}(\rho, Ind_L^G(I\theta_{f_L})).$$

Le terme indexé par $L = G$ n'est autre que $m_{geom}(\rho, I\theta_f)$. Pour $L \neq G$, le terme $m_{geom}(\rho, Ind_L^G(I\theta_{f_L}))$ est égal d'après le lemme 7.2 au terme $m_{geom}(\rho, I_{\theta_{f_L}})$ qui intervient dans (1). A cause du signe négatif présent dans (1), ces termes disparaissent et (1) devient l'égalité de l'énoncé. $\square$

7.9 Fin de la preuve

On veut prouver que $m(\rho, \pi) = m_{geom}(\rho, \pi)$ pour tout $\rho \in Temp(H)$ et tout $\pi \in Temp(G)$. Fixons ρ. On peut aussi bien démontrer l'égalité précédente pour π parcourant un ensemble de représentations virtuelles tel que tout élément de $Temp(G)$ soit combinaison linéaire d'éléments de cet ensemble. La réunion de $T_{ell}(G)$ et de l'ensemble des représentations tempérées qui sont des induites propres convient. Le cas d'une telle induite est réglé par le lemme 7.7. Reste le cas d'un élément π de $T_{ell}(G)$ pour lequel on reprend les notations de 7.4. Soit f vérifiant les conditions du lemme de ce paragraphe. D'après le (i) de ce lemme, on a

$$m_{geom}(\rho, I\theta_f) = m_{geom}(\rho, \pi).$$

D'après les (ii) et (iii) du lemme, on a aussi

$$m_{spec}(\rho, f) = \sum_{\zeta \in R(\tau)^\vee; m(\rho, \pi(\zeta))=1} t(\pi(\zeta)\check{})^{-1} \theta_{\pi(\zeta)\check{}}(f)$$

$$= \sum_{\zeta \in R(\tau)^\vee} m(\rho, \pi(\zeta))\zeta(t) = m(\rho, \pi).$$

Alors l'égalité voulue résulte du lemme 7.8 $\square$

7.10 Conséquence pour la conjecture locale de Gross-Prasad

Soient $(V_i, q_{V_i}$ et (W_i, q_{W_i}) deux espaces quadratiques compatibles tels que $d_{V_i} > d_{W_i}$. On note G_i et H_i leurs groupes spéciaux orthogonaux et on suppose ces groupes quasi-déployés sur F. A équivalence près, il existe au plus un espace quadratique $(V', q_{V'})$ tel que $d_{V'} = d_{V_i}$ et que les discriminants de $q_{V'}$ et q_{V_i} soient égaux mais leurs indices de Witt soient distincts. Si cet espace existe (ce qui est toujours le cas si $d_{V_i} \geq 3$) on le note (V_a, q_{V_a}). On introduit de même un éventuel espace quadratique (W_a, q_{W_a}). On note G_a et

H_a leurs groupes spéciaux orthogonaux. Le groupe G_a, resp. H_a, est une forme intérieure de G_i, resp. H_i. Les espaces quadratiques (V_a, q_{V_a}) et (W_a, q_{W_a}) sont compatibles.

Nous admettons que les ensembles de représentations $Temp(G_i)$, $Temp(G_a)$, $Temp(H_i)$ et $Temp(H_a)$ se décomposent en unions disjointes de L-paquets de sorte que les propriétés (1), (2) et (3) de [W1] 13.2 soient vérifiées. Soient Π_i un L-paquet dans $Temp(G_i)$ et Σ_i un L-paquet dans $Temp(H_i)$. Si l'espace (V_a, q_{V_a}) existe, il peut correspondre à Π_i un L-paquet de $Temp(G_a)$. On le note Π_a. Dans les autres cas, c'est-à-dire ou bien l'espace (V_a, q_{V_a}) existe et aucun L-paquet de $Temp(G_a)$ ne correspond à Π_i, ou bien l'espace (V_a, q_{V_a}) n'existe pas, on pose $\Pi_a = \emptyset$. On définit de façon similaire Σ_a.

Théorème. *Il existe un unique couple* $(\rho, \pi) \in (\Sigma_i \times \Pi_i) \cup (\Sigma_a \times \Pi_a)$ *tel que* $m(\rho, \pi) = 1$.

La preuve est la même que celle du théorème 13.3 de [W1]. Dans cette référence, l'hypothèse de cuspidalité des éléments de $\Pi_i \cup \Pi_a$ ne servait qu'à utiliser l'égalité $m(\rho, \pi) = m_{geom}(\rho, \pi)$ qui n'était alors démontrée que pour π cuspidale. Maintenant que l'on dispose de cette égalité pour toutes les représentations ρ, π tempérées, cette hypothèse ne sert plus et on obtient le résultat pour tous les paquets tempérés. $\square$

Bibliographie

[AGRS] A. Aizenbud, D. Gourevitch, S. Rallis, G. Schiffmann : *Multiplicity one theorems*, prép. 2007

[A1] J. Arthur : *The trace formula in invariant form*, Annals of Math. 114 (1981), p.1-74

[A2] ——— : *The invariant trace formula I. Local theory*, J. AMS 1 (1988), p. 323-383

[A3] ——— : *A local trace formula*, Publ. IHES 73 (1991), p.5-96

[A4] ——— : *Intertwining operators and residues I. Weighted characters*, J. Funct. Analysis 84 (1989), p. 19-84

[A5] ——— : *On elliptic tempered characters*, Acta Math. 171 (1993), p.73-138

[A6] ——— : *On a family of distributions obtained from Eisenstein series II : explicit formulas*, Amer. J. Math. 104 (1982), p.1289-1336

[GGP] W. T. Gan, B. Gross, D. Prasad :*Symplectic local root numbers, central critical L-values and restriction problems in the representation theory of classical groups*, prép. 2008

[GP] B. Gross, D. Prasad : *On irreducible représentations of* $SO_{2n+1} \times SO_{2m}$, Can. J. Math. 46 (1994), p.930-950

[HCDeBS] : Harish-Chandra, S. DeBacker, P. Sally : *Admissible invariant distributions on reductive p-adic groups*, AMS Univ. lecture series 16 (1999)

[II] A. Ichino, T. Ikeda : *On the periods of automorphic forms on special orthogonal groups and the Gross-Prasad conjecture* , prép. 2008

[R] F. Rodier : *Modèle de Whittaker et caractères de représentations*, in Non commutative harmonic analysis, J. Carmona, J. Dixmier, M. Vergne éd. Springer LN 466 (1981), p.151-171

[W1] J.-L. Waldspurger : *Une formule intégrale reliée à la conjecture de Gross-Prasad*, prépublication 2008

[W2] ————— : *La formule de Plancherel pour les groupes p-adiques, d'après Harish-Chandra*, J. of the Inst. of Math. Jussieu 2 (2003), p.235-333

Institut de Mathématiques de Jussieu-CNRS
175, rue du Chevaleret
75013 Paris
e-mail : waldspur@math.jussieu.fr